Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena,XXX, 44-59 (1981)

Mario DE SALVO - Domenico FRENI (*)

Semi-ipergruppi e ipergruppi ciclici (**).

Sunto. – *È naturale attendersi che, analogamente a quanto succedè per i sottogruppi ciclici nella teoria dei gruppi, i sottoipergruppi e sottosemi-ipergruppi ciclici giochino un ruolo importante in quella degli ipergruppi e semi-ipergruppi. Lo studio di questo argomento è affrontato in questo lavoro.*

Summary. – *It is natural to expect that, as it happens for the cyclic subgroups in the theory of groups, the cyclic subhypergroups and subsemihypergroups play an important role in the theory of hypergroups and semihypergroups. This work deals with the study of this subject.*

Sia H un semi-ipergruppo e P una sua parte non vuota.

DEFINIZIONE 1. Diciamo che P è *parte ciclica* di H se $\exists x \in P$ tale che $\forall a \in P \ \exists n \in N^*$: $a \in x^n$.

L'elemento x si dirà *generatore* di P.

DEFINIZIONE 2. Diciamo che H è un *semi-ipergruppo ciclico* se H è parte ciclica.

ALCUNI ESEMPI.

I) Gli ipergruppi totali sono ciclici, ed in particolare ogni loro elemento può fungere da generatore.

(*) Istituto di Matematica dell'Università di Messina.
(**) Nota presentata da G. Gemignani, membro del Comitato di Redazione, il 5-XI-1981.
Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.

II) Il semi-ipergruppo $H = \{a, b, c\}$ con la seguente tabella di moltiplicazione

	a	b	c
a	b	b, c	b, c
b	b, c	b, c	b, c
c	b, c	b, c	b, c

è un semi-ipergruppo ciclico, con generatore « a », infatti $a \in a$; $b \in a^2$; $c \in a^3$.

III) L'ipergruppo $H = \{x, a, b\}$ definito dalla seguente tabella

	x	a	b
x	a, b	x	x
a	x	a	b
b	x	b	a

è un ipergruppo ciclico, con generatore « x », infatti $a \in x^2$; $b \in x^2$.

IV) Il semi-ipergruppo $H = \{a, b, c, d\}$ definito dalla seguente tabella

	a	b	c	d
a	b, c	b, c	b, c	b, c
b	b, c	b, c	b, c	b, c
c	b, c	b, c	b, c	b, c
d	b, c	b, c	b, c	a

è un semi-ipergruppo ciclico e completo con generatore « d », infatti $a \in d^2$; $b \in d^3$; $c \in d^3$.

V) L'ipergruppo $H = \{a, b, c, d\}$ con la seguente tabella

	a	b	c	d
a	b	a, c, d	b	b
b	a, c, d	b	a, c, d	a, c, d
c	b	a, c, d	b	b
d	b	a, c, d	b	b

è un ipergruppo ciclico e completo con generatore « a », infatti $b \in a^2$; $c \in a^3$; $d \in a^3$.

Definizione 3. Sia H un semi-ipergruppo ciclico con generatore « h ».

Chiamiamo *ciclicità* di un elemento $a \in H$ il minimo $m \in N^* - \{1\}$ tale che $a \in h^m$.

Riguardo al generatore h, se $\nexists m \in N^* - \{1\}$ tale che $h \in h^m$ diciamo che h è *privo di ciclicità*.

Nota. Se la ciclicità di un elemento « a » è m, scriviamo $\mathrm{cicl}\,(a) = m$.

Definizione 4. Se H è un semi-ipergruppo ciclico, chiamiamo *ciclicità* di H il $\max\{\mathrm{cicl}\,(a)/a \in H\}$ e la indichiamo con $\mathrm{cicl}\,(H)$.

Osservazione 1. Condizione sufficiente affinchè un semi-ipergruppo H sia ciclico è che $\exists x \in H$, $\exists n \in N^*$: $x^n = H$.

Lemma 1. Se H è un semi-ipergruppo completo, allora $\forall n \in N^*$, $\forall (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in H^n$ si ha:

$$\mathcal{C}\Big(\prod_{i=1}^{n} a_i\Big) = \mathcal{C}(u) \qquad \forall u \in \prod_{i=1}^{n} a_i \ (^1).$$

Dimostrazione. Sia $u \in \prod_{i=1}^{n} a_i$. È noto che $\mathcal{C}\Big(\prod_{i=1}^{n} a_i\Big) = \bigcup_{u \in \prod_{i=1}^{n} a_i} \mathcal{C}(u)$. Sia $w \in \prod_{i=1}^{n} a_i$, allora $w\beta^* u$, perciò $w \in \mathcal{C}(u)$, pertanto

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \mathcal{C}\Big(\prod_{i=1}^{n} a_i\Big) \subset \mathcal{C}(u)\,.$$

Il viceversa è banale. (c.v.d.)

Teorema 1. Un semi-ipergruppo H è completo se, e solo se,

$$\forall (m, n) \in (N^* - \{1\})^2\,, \quad \forall (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in H^m\,, \quad \forall (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in H^n$$

si ha che

$$\prod_{i=1}^{m} a_i \cap \prod_{i=1}^{n} b_i \neq \emptyset \quad \text{implica} \quad \prod_{i=1}^{m} a_i = \prod_{i=1}^{n} b_i\,.$$

(1) Per questa ed altre notazioni si rinvia a [6], [15].

DIMOSTRAZIONE. Proviamo l'implicazione $\rightarrow$. H completo implica $\prod_{i=1}^{m} a_i = \mathcal{C}\left(\prod_{i=1}^{m} a_i\right)$ e $\prod_{i=1}^{n} b_i = \mathcal{C}\left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right)$. Da $\prod_{i=1}^{m} a_i \cap \prod_{i=1}^{n} b_i \neq \emptyset$ segue che esiste $a \in \prod_{i=1}^{m} a_i$, $a \in \prod_{i=1}^{n} b_i$ quindi, per il Lemma 1, $\mathcal{C}(a) = \mathcal{C}\left(\prod_{i=1}^{m} a_i\right)$ e $\mathcal{C}(a) = \mathcal{C}\left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right)$ perciò $\mathcal{C}\left(\prod_{i=1}^{m} a_i\right) = \mathcal{C}\left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right)$ e quindi $\prod_{i=1}^{m} a_i = \prod_{i=1}^{n} b_i$.

Il viceversa è immediato. (c.v.d.)

PROPOSIZIONE 1. Se H è un semi-ipergruppo ciclico e completo, allora H è commutativo.

DIMOSTRAZIONE. Sia h il generatore di H.

Sia $\{x, y\} \subset H$, allora $\exists \{m, n\} \subset N^*$ tali che $x \in h^m$, $y \in h^n$. Certamente $x \circ y \subset h^{m+n}$ quindi $x \circ y \cap h^{m+n} \neq \emptyset$ da cui, per il Teorema 1, si ha che $x \circ y = h^{m+n}$.

Analogamente $y \circ x = h^{n+m}$, pertanto $x \circ y = y \circ x$. (c.v.d.)

PROPOSIZIONE 2. Sia H un semi-ipergruppo e sia P una parte ciclica di H generata da p; allora $\forall a \in P\ \exists m \in N^*$: $p^m \subset \mathcal{C}(a)$.

Se H è, inoltre, completo $p^m = \mathcal{C}(a)$.

DIMOSTRAZIONE. $\forall a \in P\ \exists m \in N^*$: $a \in p^m$.

Preso $u \in p^m$ si ha che $a \,\beta\, u$ e quindi $a \,\beta^*\, u$ perciò $u \in \mathcal{C}(a)$ pertanto $p^m \subset \mathcal{C}(a)$.

Se H è completo $p^m = \mathcal{C}(p^m)$ quindi, siccome $a \in p^m$ implica $\mathcal{C}(a) \subset \subset \mathcal{C}(p^m)$, si ha $\mathcal{C}(a) \subset p^m$. (c.v.d.)

OSSERVAZIONE 2. Se H è un semi-ipergruppo completo è noto che:

$$\forall (a, b) \in H^2, \quad a \circ b = \mathcal{C}(a \circ b) = \mathcal{C}(a) \circ b = a \circ \mathcal{C}(b) = \mathcal{C}(a) \circ \mathcal{C}(b) .$$

TEOREMA 2. Se H è un semi-ipergruppo ciclico e completo con generatore h tale che $\operatorname{cicl}(h) = r$, allora H è un ipergruppo.

DIMOSTRAZIONE. Occorre provare che $\forall (a, b) \in H^2$

I) $\exists x \in H$: $a \in b \circ x$,

II) $\exists y \in H$: $a \in y \circ b$.

Proviamo la I).

Certamente $\exists \{m, n\} \subset N^*$ tale che $a \in h^m$, $b \in h^n$.

Supponiamo che sia $m > n$.

In tali condizioni $\forall x \in h^{m-n}$ si ha che $a \in h^n \circ x$; infatti, $h^n \circ x \subset h^n \circ h^{m-n}$ quindi $h^n \circ x \cap h^m \neq \emptyset$ da cui segue, per il Teorema 1, $h^n \circ x = h^m$ perciò $a \in h^n \circ x$.

Per la Proposizione 2 si ha $h^n = \mathcal{C}(b)$, pertanto $a \in \mathcal{C}(b) \circ x$ e siccome, per l'Osservazione 2, $\mathcal{C}(b) \circ x = \mathcal{C}(b \circ x) = b \circ x$ in definitiva $a \in b \circ x$.

Supponiamo che sia $m \leqslant n$. In tal caso, siccome $\operatorname{cicl}(h) = r$, $h \in h^r$ con $r > 1$ quindi $h^m \subset (h^r)^m = h^{rm}$ pertanto $a \in h^{rm}$.

E quindi si ha $a \in h^{rm}$ e $b \in h^n$ pertanto, se $rm > n$, il caso si riconduce al precedente, altrimenti si itera il procedimento fino ad arrivare ad un certo esponente $r^s m$ di h strettamente maggiore di n. (c.v.d.)

COROLLARIO 1. Se H è un semi-ipergruppo completo e ciclico, con generatore h tale che $\operatorname{cicl}(h) = r$, allora H è uno Join Space.

DIMOSTRAZIONE. Segue subito dalla Proposizione 1, dal Teorema 2 e dalla Proposizione 19 di [10]. (c.v.d.)

TEOREMA 3. Non esistono ipergruppi ciclici con generatore privo di ciclicità.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che esista un ipergruppo ciclico H, generato da h e tale che h sia privo di ciclicità, cioè tale che $\nexists m \in \in N^* - \{1\}$ tale che $h \in h^m$.

Si può allora affermare che $\nexists (x, y) \in H^2$ tale che $h \in x \circ y$; infatti, se una tale coppia esiste, siccome $\exists (r, s) \in (N^*)^2$ tale che $x \in h^r$ e $y \in h^s$, si ha: $x \circ y \subset h^{r+s}$ e quindi $h \in h^{r+s}$ il che contrasta con l'ipotesi.

Pertanto in H non è più soddisfatta la condizione di riproducibilità. (c.v.d.)

COROLLARIO 2. Sia H un semi-ipergruppo ciclico e completo, con generatore h; allora H è un semi-ipergruppo proprio se e solo se h è privo di ciclicità.

DIMOSTRAZIONE. Segue subito dai Teoremi 2 e 3. (c.v.d.)

PROPOSIZIONE 3. Se H è un semi-ipergruppo completo ed A una sua parte ciclica moltiplicativamente chiusa, allora A è parte completa.

DIMOSTRAZIONE. Sia h il generatore di A. Occorre provare che:

$$\text{se } \prod_{i=1}^{n} a_i \cap A \neq \emptyset \quad \text{allora} \quad \prod_{i=1}^{n} a_i \subset A .$$

Sia $a \in \prod_{i=1}^{n} a_i \cap A$. Supposto h il generatore di A, $\exists m \in N^*$ tale che $a \in h^m$ quindi $\prod_{i=1}^{n} a_i \cap h^m \neq \emptyset$ da cui segue, per il Teorema 1, $\prod_{i=1}^{n} a_i = h^m$.

Da A parte moltiplicativamente chiusa e $h \in A$ segue $h^m \subset A$ pertanto $\prod_{i=1}^{n} a_i \subset A$. (c.v.d.)

PROPOSIZIONE 4. Se H è un ipergruppo ciclico tutti i suoi sotto semi-ipergruppi contenenti il suo generatore coincidono con H.

DIMOSTRAZIONE. Immediata. (c.v.d.)

PROPOSIZIONE 5. Se G è un gruppoide con un elemento $g \in G$ tale che $\forall a \in G\ \exists n \in N^*$: $a = \underset{(\gamma)}{g^n}$ secondo un raggruppamento γ degli indici, vedi [15], allora $\mathcal{A}^*(G)$ è ciclico con generatore g.

DIMOSTRAZIONE. Sia $x \in \mathcal{A}^*(G)$. Per come è definito il gruppoide G, $\exists n$, $\exists \gamma$ tale che $x = \underset{(\gamma)}{g^n}$ quindi $x \in \mathcal{A}^*(\underset{(\gamma)}{g^n}) = \prod^{n} g$. (c.v.d.)

COROLLARIO 3. Se G è un gruppoide con un elemento $g \in G$ tale che $\forall a \in G\ \exists n \in N^*$: $a = \underset{(\gamma)}{g^n}$ secondo un raggruppamento degli indici, ed in particolare $g = \underset{(\gamma)}{g^m}$ con $m \in N^* - \{1\}$, allora $\mathcal{A}^*(G)$ è ipergruppo.

DIMOSTRAZIONE. Subito dal Teorema 2 e dalla Proposizione 5. (c.v.d.)

PROPOSIZIONE 6. Sia H un semi-ipergruppo e siano A e B sotto semi-ipergruppi ciclici, generati rispettivamente da «a» e «b», allora si ha:

(I) Se $a \in A \cap B$ allora $A \subset B$.

(II) Se $\{a, b\} \subset A \cap B$ allora $A = B$.

DIMOSTRAZIONE. Proviamo la (I).

$$\forall x \in A\ \exists m \in N^*:\ x \in a^m .$$

Poichè B è semi-ipergruppo ed $a \in B$ segue che $a^m \subset B$, quindi $x \in B$ pertanto $A \subset B$.

La (II) segue subito da (I). (c.v.d.)

PROPOSIZIONE 7. Sia H un semi-ipergruppo e sia P una parte ciclica di H, generata da h; allora $\forall (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in P^n\ \exists m \in N^*$ tale che $h^m \subset \mathcal{C}\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)$. Se H è, inoltre, completo $h^m = \mathcal{C}\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)$.

DIMOSTRAZIONE. $\forall (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in P^n\ \exists (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in (N^*)^n$ tali che $a_1 \in h^{m_1}, a_2 \in h^{m_2}, \ldots, a_n \in h^{m_n}$ e quindi $\prod_{i=1}^{n} a_i \subset h^{m_1+m_2+\ldots+m_n}$ cioè, posto $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m$, $\prod_{i=1}^{n} a_i \subset h^m$.

$\forall z \in h^m$ e $\forall a \in \prod_{i=1}^{n} a_i \subset h^m$ si ha che $z\, \beta^*\, a$ e quindi $z \in \mathcal{C}(a)$ e siccome $\mathcal{C}(a) \subset \mathcal{C}\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)$, si ha $z \in \mathcal{C}\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)$.

Quindi $\forall z \in h^m$ segue $z \in \mathcal{C}\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)$, cioè $h^m \subset \mathcal{C}\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)$.

Se H è completo, siccome $\prod_{i=1}^{n} a_i \subset h^m$ e quindi $\prod_{i=1}^{n} a_i \cap h^m \neq \emptyset$, si ha, per il Teorema 1, $\prod_{i=1}^{n} a_i = h^m$ perciò, poichè $\mathcal{C}\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) = \prod_{i=1}^{n} a_i$, si ricava $h^m = \mathcal{C}\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)$. (c.v.d.)

DEFINIZIONE 4. Sia H un semi-ipergruppo e k un suo qualunque elemento; indichiamo con Δ_k la seguente relazione binaria su H: $x\, \Delta_k\, y$ se e solo se $\exists m \in N^*$: $\{x, y\} \subset k^m$.

Sia Δ_k^* la chiusura transitiva di Δ_k.

PROPOSIZIONE 8. Se H è un semi-ipergruppo ciclico, generato da h, allora $\Delta_h^* = \beta^*$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $x\, \Delta_h^*\, y$, allora $\exists (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in H^n$ tale che $x = z_1\, \Delta_h\, z_2\, \Delta_h\, z_3 \ldots z_{n-1}\, \Delta_h\, z_n = y$ quindi $x = z_1\, \beta\, z_2\, \beta\, z_3 \ldots z_{n-1}\, \beta\, z_n = y$ per cui $x\, \beta^*\, y$.

Viceversa: sia $x\, \beta^*\, y$, allora $\exists (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in H^n$ tale che $x = z_1\, \beta\, \beta\, z_2\, \beta\, z_3 \ldots z_{n-1}\, \beta\, z_n = y$, cioè $z_i\, \beta\, z_{i-1}\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ da cui segue che $\exists (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}) \in H^k$ tale che $\{z_i, z_{i+1}\} \subset \overset{\circ}{\prod} x_{i_k}$ e quindi, poichè ogni x_{i_k} è contenuto in una potenza del generatore h, $\exists r_i \in N^*$ tale che $\{z_i, z_{i+1}\} \subset h^{r_i}$ pertanto $z_i \Delta_h z_{i+1}$, cioè $x = z_1 \Delta_h z_2 \Delta_h z_3 \dots z_{n-1} \Delta_h \Delta_h z_n = y$ e quindi $x \Delta_h^* y$. (c.v.d.)

Proposizione 9. Se H è un semi-ipergruppo ciclico e completo, generato da h, allora $\Delta_h = \beta^*$.

Dimostrazione. Per la Proposizione 8 $\Delta_h \subset \Delta_h^* = \beta^*$; proviamo che $\beta^* \subset \Delta_h$.

$x \beta^* y$ implica $x \mathcal{C} y$ e quindi $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$; del resto, per la Proposizione 2, $\exists (m, n) \in (N^*)^2$ tale che $h^m = \mathcal{C}(x)$, $h^n = \mathcal{C}(y)$ pertanto $h^m = h^n$ e quindi $x \Delta_h y$. (c.v.d.)

Teorema 4. Se H è un semi-ipergruppo ciclico, generato da h, e cicl $(h) = r$, allora sussiste la seguente formula:

$$\forall m \in N^* \ h^m \subset h^{pr+q} \quad \text{con } (p, q) \in N^2 \text{ e } p + q = m .$$

Dimostrazione. Sia $(p, q) \in N^2$ con $p + q = m$.

$$\text{Cicl}\,(h) = r \quad \text{implica } h \in h^r , \quad \text{quindi } h^p \subset h^{pr} .$$

Allora $h^m = h^{p+q} = h^p h^q \subset h^{pr} h^q = h^{pr+q}$. (c.v.d.)

Proposizione 10. Se H è un semi-ipergruppo ciclico, generato da h e cicl $(h) = r$, allora $\forall m \in N^*$ $h^m \subset h^{m+(r-1)}$.

Dimostrazione. Immediata per induzione su m. (c.v.d.)

Proposizione 11. Se h è un semi-ipergruppo ciclico, generato da h, allora vale la seguente uguaglianza

$$H = \bigcup_{p=1}^{\text{cicl}(H)} h^p .$$

Dimostrazione. Sia cicl $(H) = m$, allora se $x \in H$ si ha che cicl $(x) \leqslant m$ e perciò $\exists r \leqslant m$ tale che $x \in h^r$ quindi

$$H \subset \bigcup_{p=1}^{m} h^p .$$

Il viceversa è immediato. (c.v.d.)

Lemma 2. Se H è un semi-ipergruppo ciclico, con generatore h tale che cicl $(h) = 2$, allora $\forall n \in N^*$ $h^n \subset h^{n+1}$.

Dimostrazione. Subito per induzione su n. (c.v.d.)

Proposizione 12. Se H è un semi-ipergruppo ciclico, con generatore h tale che cicl $(h) = 2$, allora

$$H = h^{\text{cicl}(H)} .$$

Dimostrazione. Sia cicl $(H) = m$. $\forall x \in H$ $\exists s \leqslant m$ tale che $x \in h^s$; per il Lemma 2, siccome $s \leqslant m$, si ha $h^s \subset h^m$ quindi $x \in h^m$ pertanto $H \subset h^m$ perciò $H = h^m$. (c.v.d.)

Corollario 4. Se H è un semi-ipergruppo ciclico, con generatore h tale che cicl $(h) = 2$, allora $|H/\beta^*| = 1$.

Dimostrazione. Subito dalla Proposizione 12. (c.v.d.)

Proposizione 13. Sia H un semi-ipergruppo ciclico, generato da h; allora $\forall a \in H$ tale che $\exists m \in N^*$: $h \in a^m$ si ha che « a » genera H.

Dimostrazione. $\forall x \in H$ $\exists n \in N^*$ tale che $x \in h^n$.

$x \in h^n$ e $h \in a^m$ implicano $x \in (a^m)^n = a^{mn}$ quindi $\forall x \in H$ esiste, certamente, un intero positivo $k \neq 0$ tale che $x \in a^k$. (c.v.d.)

Proposizione 14. Sia H un semi-ipergruppo ciclico e completo, generato da h; allora se $a \beta^* h$ si ha che « a » genera H.

Dimostrazione. $a \beta^* h$ implica, per la Proposizione 9, $a \Delta_h h$ quindi $\exists n$ tale che $\{a, h\} \subset h^n$.

Da $a \in h^n$ segue $a^n \subset h^{nn}$ quindi $a^n \cap h^{nn} \neq \emptyset$ pertanto, per il Teorema 1, $a^n = h^{nn}$.

Del resto $h \in h^n$ implica $h \in h^{nn}$ quindi $h \in a^n$ da cui segue, per la Proposizione 13, « a » genera H. (c.v.d.)

Corollario 5. Sia H un semi-ipergruppo ciclico e completo, con generatore h tale che cicl $(h) = 2$; allora $\forall a \in H$ « a » genera H.

Dimostrazione. Segue subito dal Corollario 4 e dalla Proposizione 14. (c.v.d.)

PROPOSIZIONE 15. Se H è un ipergruppo ciclico e completo, generato da h, allora le condizioni seguenti sono equivalenti:

(i) $h \in \omega_H$.

(ii) H è totale.

(iii) $\text{cicl}(h) = 2$.

DIMOSTRAZIONE. Proviamo l'equivalenza tra (i) e (ii).
Verifichiamo che (i) $\to$ (ii).
Per la Proposizione 4 da $h \in \omega_H$, segue che $\omega_H = H$ e quindi, poichè H è completo, $\forall (x, y) \in H^2$ $x \circ y = H$.
L'implicazione inversa è immediata.
Verifichiamo che (ii) $\leftrightarrow$ (iii).
L'implicazione $\to$ è immediata.
Proviamo il viceversa. $\text{cicl}(h) = 2$ implica, per il Corollario 4, $|H/\beta^*| = 1$ cioè $H/\beta^* = \{\bar{h}\}$ e quindi, siccome H è completo, $\forall (x, y) \in H^2$ $x \circ y = \bar{h}$ e quindi $x \circ y = H$. (c.v.d.)

PROPOSIZIONE 16. Sia $f\colon H \to H'$ un omomorfismo tra un semi-ipergruppo ciclico H e un semi-ipergruppo H'; allora $f(H)$ è una parte ciclica di H', e l'immagine di un generatore di H è un generatore di $f(H)$.

DIMOSTRAZIONE. $\forall u \in f(H)$ $\exists a \in H$ tale che $u = f(a)$; se h è il generatore di H, $\exists m \in N^*$ tale che $a \in h^m$ quindi $u = f(a) \in f(h^m) \subset (f(h))^m$ cioè $u \in (f(h))^m$. (c.v.d.)

COROLLARIO 6. Se H è un semi-ipergruppo ciclico e R è una equivalenza regolare su H, allora H/R è un semi-ipergruppo ciclico.

DIMOSTRAZIONE. Segue subito dalla Proposizione 16, prendendo in considerazione la proiezione canonica. (c.v.d.)

TEOREMA 5. Ogni ipergruppo $\langle H, \circ\rangle$ è immergibile in un ipergruppo ciclico $\langle K, \ominus\rangle$ con $\omega_K = H$.

DIMOSTRAZIONE. Sia A un insieme non vuoto tale che $H \cap A = \emptyset$; poniamo $K = H \cup A$ e definiamo in K la seguente iper-operazione $\ominus$, vedi [5];

$$\forall (x, y) \in H^2 \qquad x \ominus y = x \circ y\,,$$

$$\forall (x, y) \in A^2 \qquad x \ominus y = H\,,$$

$$\forall (x, y) \in H \times A \qquad x \ominus y = y \ominus x = A\,.$$

(I) È di immediata verifica che H è ipergruppo.

(II) Mostriamo che K è ciclico ed ogni elemento $a \in A$ lo genera.

$$\forall x \in H \qquad x \in a^2 \qquad \text{perchè } a^2 = a \ominus a = H\,.$$

$$\forall x \in A \qquad x \in a^3 \qquad \text{perchè } a^3 = a^2 \ominus a = A\,.$$

Si noti, inoltre, che

$$(\square) \qquad \forall x \in K \qquad \text{cicl}(x) \in \{2, 3\}\,.$$

(III) Mostriamo che $\omega_k = H$.

La relazione Δ_a $\forall a \in A$ è equivalenza in K; infatti è banalmente riflessiva e simmetrica ed inoltre vale, come adesso vedremo, la transitività:

$$x\,\Delta_a\,y \text{ implica che } \exists m \text{ tale che } \{x, y\} \subset a^m\,;$$

$$y\,\Delta_a\,z \text{ implica che } \exists n \text{ tale che } \{y, z\} \subset a^n\,;$$

ove, per ($\square$), si può porre:

1) $m = n = 2$,

2) $m = n = 3$,

3) $m = 2$, $n = 3$,

4) $m = 3$, $n = 2$.

Nei casi 1) e 2) banalmente segue $x\,\Delta_a\,z$; i casi 3), 4) sono da escludersi, poichè:

$$m = 2 \quad \text{implica } \{x, y\} \subset a^2 = H\,,$$

$$n = 3 \quad \text{implica } \{y, z\} \subset a^3 = A\,,$$

quindi $y \in H \cap A$ il che è assurdo.
Poichè Δ_a è equivalenza $\Delta_a = \Delta_a^*$; quindi, per la Proposizione 8, $\Delta_a = \beta^*$ pertanto $K/\beta^* = K/\Delta_a = \{\bar{x}, \bar{y} | x \in a^2, y \in a^3\}$, perciò $|K/\beta^*| = 2$.
Inoltre $\forall x \in H$ $\bar{x} = 1_{K/\beta^*}$ e quindi $\omega_K = \text{H}$. (c.v.d.)

NOTA. **Nel seguito gli ipergruppi $\langle K, \ominus\rangle$, costruiti come nel Teorema 5, saranno indicati come (H, A)-Ipergruppo.**

PROPOSIZIONE 17. Dati due ipergruppi $\langle H_1, \circ \rangle$ e $\langle H_2, \grave{\circ} \rangle$ tali che $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ e $H_1 \simeq H_2$; allora, se $\langle K, \ominus \rangle$ e $\langle K, \grave{\ominus} \rangle$ sono rispettivamente (H_1, H_2)-Ipergruppo e (H_2, H_1)-Ipergruppo, si ha che $\langle K, \ominus \rangle \simeq \langle K, \grave{\ominus} \rangle$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $f = H_1 \to H_2$ un isomorfismo.
Definiamo l'applicazione g: $\langle K, \ominus \rangle \to \langle K, \grave{\ominus} \rangle$ ponendo:

$$\forall x \in H_1 \quad g(x) = f(x)\,,$$

$$\forall x \in H_2 \quad g(x) = f^{-1}(x)\,,$$

g, chiaramente bigettiva, è inoltre un omomorfismo buono; infatti esaminiamo i casi possibili:

1) $(x, y) \in H_1 \times H_1$,
2) $(x, y) \in H_2 \times H_2$,
3) $(x, y) \in H_1 \times H_2$,
4) $(x, y) \in H_2 \times H_1$.

Caso (1)

$$g(x \ominus y) = g(x \circ y) = f(x \circ y) = f(x) \grave{\circ} f(y) = g(x) g \grave{\circ} (y) = g(x) \grave{\ominus} g(y)\,.$$

Caso (2)

$$g(x \ominus y) = g(H_1) = f(H_1) = H_2\,,$$
$$g(x) \grave{\ominus} g(y) = f^{-1}(x) \grave{\ominus} f^{-1}(y) = H_2\,.$$

Caso (3)

$$g(x \ominus y) = g(H_2) = f^{-1}(H_2) = H_1\,,$$
$$g(x) \grave{\ominus} g(y) = f(x) \grave{\ominus} f^{-1}(y) = H_1\,.$$

Il caso (4) si prova come il (3). (c.v.d.)

TEOREMA 6. Se H è un ipergruppo, non avente struttura di gruppo o di ipergruppo totale, e $|H| = 2$, allora, a meno di isomorfismi, la struttura di H è data da una delle seguenti tabelle:

1)

	a	b
a	a, b	a, b
b	a, b	a

2)

	a	b
a	a	a, b
b	a, b	a, b

3)

	a	b
a	a, b	a, b
b	a	b

4)

	a	b
a	a	a, b
b	b	a, b

5)

	a	b
a	a	b
b	b	a, b

6)

	a	b
a	a	a, b
b	a, b	b

Inoltre le tabelle su elencate descrivono tutte, ipergruppi ciclici, ad eccezione della 6).

LEMMA 3. Sia H un semi-ipergruppo con identità scalare « e » e con un elemento y tale che $\forall x \in H - \{e\}$ $x^2 = \{y\}$ ed inoltre tale che $\forall x \in H - \{e\}$ $e \notin x^3$; allora, se H non è gruppo, H non è ciclico.

DIMOSTRAZIONE. « e » ed « y » non sono certamente generatori $\forall x \in H - \{e, y\}$ $x^{2k} = \{y\}$, $x^{2k+1} = x^3$ $\forall k > 0$ quindi x non può generare H perchè $\nexists n$ tale che $e \in x^n$. (c.v.d.)

LEMMA 4. Se H è un semi-ipergruppo con identità scalare « e » e tale che $H = A \cup K$ ove $\forall x \in A$ $x^2 = \{x\}$, $\forall y \in K$ $y^2 = \{e\}$, allora, se non è un gruppo, H non è ciclico.

DIMOSTRAZIONE. Gli elementi di A non possono generare H, perchè sono idempotenti.
Gli elementi y di K non possono generare H perchè sono tali che:

$$y^{2k} = \{e\}\,, \qquad y^{2k+1} = \{y\}\,. \qquad \text{(c.v.d.)}$$

LEMMA 5. Se esistesse un ipergruppo ciclico H con identità scalare « e », con $|H| = 3$ e tale che $\forall x \in H$ $|x^2| = 1$, allora H dovrebbe essere commutativo.

DIMOSTRAZIONE. Sia $H = \{e, x, y\}$.
Per le ipotesi fatte è sufficiente provare che $x \circ y = y \circ x$. Osserviamo intanto che in H, per quanto riguarda i quadrati di x e y, si possono presentare i seguenti casi:

(1) $x^2 = \{x\}$, $y^2 = \{x\}$,
(2) $x^2 = \{y\}$, $y^2 = \{x\}$,
(3) $x^2 = \{e\}$, $y^2 = \{x\}$,

(4) $x^2 = \{x\},\ y^2 = \{y\}$,

(5) $x^2 = \{x\},\ y^2 = \{y\}$,

(6) $x^2 = \{e\},\ y^2 = \{y\}$,

(7) $x^2 = \{x\},\ y^2 = \{e\}$,

(8) $x^2 = \{y\},\ y^2 = \{e\}$,

(9) $x^2 = \{e\},\ y^2 = \{e\}$.

I casi (4), (6), (7), (9) sono da scartare in quanto, per il Lemma 4, H non sarebbe un ipergruppo ciclico.

Nei casi (1), (2), (3) si ha:

$$x \circ y = y^2 \circ y = (y \circ y) \circ y = y \circ (y \circ y) = y \circ y^2 = y \circ x\,.$$

Analogamente si verificano i casi rimanenti. (c.v.d.)

TEOREMA 7. Non esistono ipergruppi ciclici H, con identità scalare « e », con $|H| = 3$ e tali che $\forall x \in H\ |x^2| = 1$.

DIMOSTRAZIONE. Per i Lemmi (3), (4), (5), e per le ipotesi fatte, sono possibili per H le seguenti tabelle di moltiplicazione:

	e	x	y
e	e	x	y
x	x	x	e, y
y	y	e, y	x

	e	x	y
e	e	x	y
x	x	x	e, x, y
y	y	e, x, y	x

	e	x	y
e	e	x	y
x	x	y	e, x
y	y	e, x	y

	e	x	y
e	e	x	y
x	x	y	e, x, y
y	y	e, x, y	y

	e	x	y
e	e	x	y
x	x	e	e, y
y	y	e, y	x

	e	x	y
e	e	x	y
x	x	e	e, x, y
y	y	e, x, y	x

	e	x	y
e	e	x	y
x	x	y	e, x
y	y	e, x	e

	e	x	y
e	e	x	y
x	x	y	e, x, y
y	y	e, x, y	e

	e	x	y
e	e	x	y
x	x	y	e, x
y	y	e, x	x

	e	x	y
e	e	x	y
x	x	y	e, x, y
y	y	e, x, y	x

	e	x	y
e	e	x	y
x	x	y	e, y
y	y	e, y	x

Ma in nessun caso è verificata l'associatività, risultando sempre

$$(x \circ x) \circ y \neq x \circ (x \circ y)\,. \qquad \text{(c.v.d.)}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] P. BONANSINGA, *Un teorema su gli ipergruppi canonici*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **29** (1981), p. 57.

[2] P. BONANSINGA, *Sugli ipergruppi quasicanonici*, Atti Soc. Pelor. Sc. Mat. Fis. Nat. Messina, in corso di stampa.

[3] P. BONANSINGA - P. CORSINI, *Su gli omomorfismi di semi-ipergruppi e di ipergruppi*, Boll. Un. Mat. It. (1981).

[4] R. H. BRUCK, *A Survey of Binary Systems*, Springer (1966).

[5] P. CORSINI, *Hypergroupes réguliers et Hypermodules*, Ann. Univ. Ferrara, Sez. VII - Sc. Mat., **20** (1975), pp. 121-135.

[6] P. CORSINI, *Hypergroupes d'associativitè des quasigroupes mediaux*, Atti Convegno su Sistemi Binari e Applicazioni, Taormina (1978).

[7] P. CORSINI, *Sur les semi-hypergroupes*, Atti Soc. Pelor. Sc. Mat. Fis. Nat. Messina (1979).

[8] P. CORSINI, *Sur les semi-hypergroupes complets et les groupoides*, Atti Soc. Pelor. Sc. Mat. Fis. Nat. Messina (1979).

[9] P. CORSINI, *Contributo alla teoria degli ipergruppi*, Atti Soc. Pelor. Sc. Mat. Fis. Nat. Messina (1980).

[10] P. CORSINI - G. ROMEO, *Hypergroupes complets e Ɠ-grupoides*, Atti Convegno su Sistemi Binari e Applicazioni, Taormina (1978).

[11[M. DE SALVO, *Omomorfismi di sd-ipergruppi*, Atti Soc. Pelor. Sc. Mat. Fis. Nat., Messina (1979).

[12] M. DE SALVO, *Sugli ipergruppi completi finiti*, Rivista Matematica dell'Università di Parma (1980).

[13] M. DRESHER - O. ORE, *Theory of multigroups*, Amer. J. Math., **60** (1938).

[14] D. Freni, *Semi-ipergruppi e equivalenze regolari*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **29** (1980).
[15] M. Koskas, *Groupoides, Demi-hypergroupes et hypergroupes*, J. Math. pures et appl., **49** (1970).
[16] J. Mittas, *Hypergroupes Canoniques*, Math. Balkanica, **2** (1972).
[17] W. Prenowitz - J. Jantosciak, *Geometries and join spaces*, J. fur die reine and angewandte Math. (1972).
[18] R. Roth, *Character and conjugacy class hypergroup of a finite group*, Annali di Mat., **20** (1975).
[19] Y. Sureau, *These de Doctorat d'Etat*, Universitè de Clermont II (1980).

"Monograf" - Bologna - Via Collamarini 5