Riv. Mat. Univ. Parma (4) **12** (1986), 177-186

M. DE SALVO e D. FRENI (*)

Ipergruppi finitamente generati (**)

1 - Ipergruppi finitamente generati e teoremi di struttura

Per quanto concerne le definizioni e le proprietà di carattere introduttivo, nonchè le notazioni proprie della teoria degli ipergruppi, si rinvia ai lavori $[2]_1$, [8] e alla introduzione di $[4]_2$.

Proviamo le seguenti proprietà.

Proposizione 1.1. *Sia H un ipergruppo e siano H_1, H_2 sottoipergruppi chiusi di H; allora $H_1 \cup H_2$ è un sottoipergruppo di H se, e solo se, $H_1 \subseteq H_2$ oppure $H_2 \subseteq H_1$.*

Dim. Sia $H_1 \cup H_2$ sottoipergruppo di H. Sia per assurdo $H_1 \nsubseteq H_2$, $H_2 \nsubseteq H_1$ e siano $x \in H_1 - H_2$, $y \in H_2 - H_1$. Poichè $H_1 \cup H_2$, è sottoipergruppo, $x \circ y \subset H_1 \cup H_2$. Quindi $\forall u \in x \circ y$ si possono avere due casi

$$(1.1) \qquad u \in H_1 \qquad\qquad (1.2) \qquad u \in H_2 .$$

Se $u \in H_1$, da $u \in x \circ y$, essendo H_1 chiuso in H, si ha $y \in H_1$, che è un assurdo. Analogamente, se $u \in H_2$ segue $x \in H_2$, che è ancora un assurdo. Quindi, necessariamente, $H_1 \subseteq H_2$ oppure $H_2 \subseteq H_1$. Il viceversa è banale.

Proposizione 1.2. *Sia H un ipergruppo e sia K un sottoipergruppo chiuso di H; allora il più piccolo sottoipergruppo chiuso di H contenente $H - K$ è H.*

(*) Indirizzo degli AA.: Dipartimento di Matematica, Università, via C. Battisti 90, 98100 Messina, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. (C.N.R.). - Ricevuto: 29-III-1985.

Dim. Sia S il più piccolo sottoipergruppo chiuso di H, contenente $H-K$. Proviamo che $S=H$. Certamente $H=K\cup(H-K)$, per cui, poichè $H-K\subset S$, si ha, a maggior ragione, $H=K\cup S$, quindi $K\cup S$ è un sottoipergruppo. Pertanto per la Proposizione 1.1, $K\subset S$ oppure $S\subset K$. Ma $S\not\subset K$, perchè altrimenti si avrebbe $H-K\subset K$. Quindi $K\subset S$, da cui $H=S$.

Ricordando che in [4]$_2$ si è posto per ogni elemento x di un ipergruppo $x^{[-1]}=\varphi^{-1}(\varphi(x)^{-1})$ si dimostra facilmente il

Lemma 1.1. *Siano H un ipergruppo, K e T sottoipergruppi parte completa di H e S una parte non vuota di H; allora le seguenti proprietà sono soddisfatte*:

(1.3) $\forall x\in K \quad x^{[-1]}\subset K$;

(1.4) $S\subset K$ *implica* $S^{[-1]}\subset K$ *ove* $S^{[-1]}=\bigcup_{s\in S} s^{[-1]}$;

(1.5) $\varphi(K\circ T)^{-1}\subset\varphi(T\circ K)$ *ove* $\varphi(K\circ T)^{-1}=\{\varphi(x)^{-1}/x\in K\circ T\}$;

(1.6) $\forall s\in S \;\; \exists s'\in S^{[-1]}$ *tale che* $\varphi(s)^{-1}=\varphi(s')$;

(1.7) $\forall s'\in S^{[-1]} \;\; \exists s\in S$ *tale che* $\varphi(s')^{-1}=\varphi(s)$;

(1.8) $\varphi(S^{[-1]})=\varphi(S)^{-1}$.

Osservazione 1.1. Ricordiamo che se A e B sono parti non vuote di un ipergruppo H e A è parte completa, allora $A\circ B$ e $B\circ A$ sono parti complete.

Teorema 1.1 *Se H è un ipergruppo e K_1, K_2 sono sottoipergruppi parte completa di H, allora $K_1\circ K_2$ e $K_2\circ K_1$ sono sottoipergruppi di H se, e solo se, $K_1\circ K_2=K_2\circ K_1$.*

Dim. Per l'Osservazione 1.1, $K_1\circ K_2=\varphi^{-1}\varphi(K_1\circ K_2)=\varphi^{-1}(\varphi(K_1)\cdot\varphi(K_2))$ ed analogamente $K_2\circ K_1=\varphi^{-1}(\varphi(K_2)\cdot\varphi(K_1))$. Quindi $K_1\circ K_2=K_2\circ K_1$ se, e solo se, $\varphi(K_1)\cdot\varphi(K_2)$ e $\varphi(K_2)\cdot\varphi(K_1)$ sono sottogruppi di H/β^*, ovvero se, e solo se, $K_1\circ K_2$ e $K_2\circ K_1$ sono sottoipergruppi di H.

Nota 1.1. Denotiamo con $\langle S\rangle$, l'intersezione di tutti i sottoipergruppi parte completa di H, contenenti la parte S di H; sia inoltre P_S l'unione di tutti i prodotti di un numero finito di elementi che appartengono a S oppure a $S^{[-1]}$.

Teorema 1.2. *Se S è una parte non vuota di un ipergruppo H, allora $\langle S\rangle=\mathscr{C}(P_S)$.*

Dim. Proviamo che $\mathscr{C}(P_S)$ è un sottoipergruppo di H. Sia $\{x,y\}\subset\mathscr{C}(P_S)$. Allora $\exists(u,v)\in P_S^2$ tale che $x\in\mathscr{C}(u)$, $y\in\mathscr{C}(v)$. Pertanto

$$x\circ y\subset\mathscr{C}(u)\circ\mathscr{C}(v)=\mathscr{C}(u\circ v)\subset\mathscr{C}(P_S).$$

Quindi $\mathscr{C}(P_S)$ è sottosemi-ipergruppo di H. Inoltre $\exists z\in H$ tale che $x\in z\circ y$. Da $x\in\mathscr{C}(u)$ e $y\in\mathscr{C}(v)$ segue $\varphi(x)=\varphi(u)$ e $\varphi(y)=\varphi(v)$. Da $x\in z\circ y$ segue $\varphi(x)=\varphi(z)\cdot\varphi(y)$, da cui $\varphi(z)=\varphi(x)\cdot\varphi(y)^{-1}=\varphi(u)\cdot\varphi(v)^{-1}$. $\{u,v\}\subset P_S$ implica che $\exists\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}\subset S\cup S^{[-1]}$ ed $\exists\{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_m\}\subset S\cup S^{[-1]}$ tali che $u\in\alpha_1\circ\alpha_2\circ\dots\circ\alpha_n$, $v\in\gamma_1\circ\gamma_2\circ\dots\circ\gamma_m$. Pertanto $\varphi(u)=\varphi(\alpha_1)\cdot\varphi(\alpha_2)\cdot\ldots\cdot\varphi(\alpha_n)$ e $\varphi(v)=\varphi(\gamma_1)\cdot\varphi(\gamma_2)\cdot\ldots\cdot\varphi(\gamma_m)$. Quindi

$$\varphi(z)=\varphi(\alpha_1)\cdot\varphi(\alpha_2)\cdot\ldots\cdot\varphi(\alpha_n)\cdot\varphi(\gamma_m)^{-1}\cdot\varphi(\gamma_{m-1})^{-1}\cdot\ldots\cdot\varphi(\gamma_1)^{-1}.$$

Per (1.6) e (1.7), $\exists\{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_m\}\subset S\cup S^{[-1]}$ tale che

$$\begin{aligned}\varphi(z)&=\varphi(\alpha_1)\cdot\varphi(\alpha_2)\cdot\ldots\cdot\varphi(\alpha_n)\cdot\varphi(\mu_1)\cdot\varphi(\mu_2)\cdot\ldots\cdot\varphi(\mu_m)\\&=\varphi(\alpha_1\circ\alpha_2\circ\dots\circ\alpha_n\circ\mu_1\circ\mu_2\circ\dots\circ\mu_m).\end{aligned}$$

Perciò $z\in\mathscr{C}(\alpha_1\circ\alpha_2\circ\dots\circ\alpha_n\circ\mu_1\circ\mu_2\circ\dots\circ\mu_m)\subset\mathscr{C}(P_S)$. Analogamente si prova che $\exists w\in\mathscr{C}(P_S)$ tale che $x\in y\circ w$. Pertanto $\mathscr{C}(P_S)$ è sottoipergruppo parte completa di H. Proviamo che se K è un sottoipergruppo parte completa di H contenente S, allora $K\supset\mathscr{C}(P_S)$. Sia $x\in\mathscr{C}(P_S)$, allora $\exists t\in P_S$ tale che $x\in\mathscr{C}(t)$.

Da $t\in P_S$ segue che $\exists\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}\subset S\cup S^{[-1]}$ tale che $t\in\alpha_1\circ\alpha_2\circ\dots\circ\alpha_n$. Quindi $\mathscr{C}(t)=\mathscr{C}(\alpha_1\circ\alpha_2\circ\dots\circ\alpha_n)$. Ma $\forall i\in\{1,2,\dots,n\}$, per (1.4), $\alpha_i\in S\cup S^{[-1]}\subset K$ e pertanto $\mathscr{C}(t)\subset\mathscr{C}(K)=K$, cioè $x\in K$.

Def. 1.1. Se S è una parte non vuota di un ipergruppo H, diciamo che $\langle S\rangle$ è il *sottoipergruppo* di H generato da S. Se S è finito, si dice che $\langle S\rangle$ è *finitamente generato*. Se $\langle S\rangle=H$ diciamo che H è *generato* da S.

Osservazione 1.2. Poichè banalmente $\langle H-\omega\rangle=H$ per qualunque ipergruppo H, si può affermare che ogni ipergruppo H tale che $|H/\beta^*|>1$ è generato da un suo sottoinsieme proprio.

Teorema 1.3. *Sia S una parte non vuota di un ipergruppo H; allora $H=\langle S\rangle$ se, e solo se, $H/\beta^*=\langle\varphi(S)\rangle$.*

Dim. Poichè φ manda sottoipergruppi parte completa contenenti S su sottogruppi contenenti $\varphi(S)$, si ha $\varphi(\langle S\rangle)=\langle\varphi(S)\rangle$; ma $\langle S\rangle$ è parte completa e quindi $\langle S\rangle=\varphi^{-1}(\varphi\langle S\rangle)=\varphi^{-1}(\langle\varphi(S)\rangle)$, da cui la tesi.

Def. 1.2. Se H è un ipergruppo finitamente generato da un insieme costituito da un solo elemento, diciamo che H è *fortemente ciclico*.

Si può osservare che se H è un gruppo, allora le definizioni di ipergruppo fortemente ciclico e di gruppo ciclico coincidono.

Osservazione 1.3. Per il Teorema 1.3 e per la Def. 1.2 si può affermare che un ipergruppo H è fortemente ciclico con generatore x se, e solo se, H/β^* è ciclico con generatore $\varphi(x)$.

Corollario 1.1. *Se H è un ipergruppo fortemente ciclico, allora ogni suo sottoipergruppo è fortemente ciclico.*

Dim. Sia $H = \langle \{x\} \rangle$ e sia K un sottoipergruppo di H. Allora, per l'Osservazione 1.3, H/β^* è un gruppo ciclico, e quindi K/β^* è un suo sottogruppo ciclico. Pertanto, ancora per l'Osservazione 1.3, K è un ipergruppo fortemente ciclico.

Osservazione 1.4. Dalla Nota 1.1 e dal Corollario 1.1, segue che ogni sottoipergruppo di un ipergruppo fortemente ciclico è parte completa.

Con dimostrazione analoga a quella del Corollario 1.1 il Teorema 2.11 di [9] e il Teorema 1.3 permettono di provare il

Teorema 1.4. *Se H è un ipergruppo commutativo, finitamente generato, ogni sottoipergruppo di H è finitamente generato.*

Def. 1.3. Diciamo che un ipergruppo H verifica la condizione di *catena ascendente a parti complete*, se ogni catena ascendente di sottoipergruppi parte completa $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots$ si ferma, cioè $\exists n \in N^*$ tale che $K_n = K_{n+1} = \dots$.

Teorema 1.5. *Un ipergruppo H e ogni suo sottoipergruppo parte completa sono finitamente generati se, e solo se, H verifica la condizione di catena ascendente a parti complete.*

Dim. Sia $K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq \dots$ una catena di sottoipergruppi parte completa di H. Sia $K = \cup K_i$ per $i = 1, 2, \dots$. Poichè i sottoipergruppi parte completa sono chiusi, per la Proposizione 1.1, K è sottoipergruppo parte completa e quindi è finitamente generato. Sia $K = \langle S \rangle$ con $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ e sia $r = \max\{j / \exists s_j \in S,\ s_j \in K_j\}$. Allora $S \subset K_r$, da cui $\langle S \rangle \subset K_r$, ma poichè $K_r \subset K = \langle S \rangle$ si ha $K_r = \langle S \rangle$. E pertanto $K_r = K_{r+1} = \dots$. Viceversa, esista per assurdo un sottoipergruppo K parte completa di H che non sia finitamente generato. Sia $h_1 \in K$, certo $\langle \{h_1\} \rangle \subsetneqq K$, quindi $\exists h_2 \in K - \langle \{h_1\} \rangle$ tale che $\langle \{h_1\} \rangle \subsetneqq \langle \{h_1, h_2\} \rangle \subsetneqq K$. Iterando il procedimento si trovano degli elementi $h_1, h_2, h_3, \dots$ che determinano una catena ascendente di sottoipergruppi parte completa: $\langle \{h_1\} \rangle \subsetneqq \langle \{h_1, h_2\} \rangle \subsetneqq \langle \{h_1, h_2, h_3\} \rangle \subsetneqq \dots$ che non si blocca mai.

Lemma 1.2. *Sia H un ipergruppo e sia x un elemento di H di periodo finito m, allora $\forall n \in N^*$ tale che $x^n \subset \omega_H$ si ha che $p(x)|n$.*

Dim. Ricordiamo che si indica con $p(x)$ il periodo di x, cioè il più piccolo intero positivo m tale che $x^m \subset \omega_H$. Certamente $\exists \{q, r\} \subset N$ tale che $n = m \cdot q + r$ con $0 \leq r < p(x)$. Se fosse $0 < r < p(x)$, allora $x^n = x^{mq+r} = (x^m)^q \circ x^r \subset \omega_H^q \circ x^r = \omega_H \circ x^r = \mathscr{C}(x^r)$; cioè $x^n \subset \mathscr{C}(x^r)$ da cui $\mathscr{C}(x^n) = \mathscr{C}(x^r)$. Ma $x^n \subset \omega_H$ implica $\mathscr{C}(x^n) = \omega_H$, quindi $x^r \subset \mathscr{C}(x^r) = \mathscr{C}(x^n) = \omega_H$, cioè $x^r \subset \omega_H$, assurdo perchè $0 \leq r < m$. Pertanto necessariamente $r = 0$ e quindi $n = m \cdot q$, cioè $m|n$.

Corollario 1.2. *Sia x un elemento di un ipergruppo H, allora $p(x) = p(\varphi(x))$.*

Dim. Sia $p(x) = n$ e $p(\varphi(x)) = m$. Per la Proposizione 5 di [7]$_1$ $m|n$. Da $p(\varphi(x)) = m$ segue $\varphi(x)^m = 1_{H/\beta^*}$, cioè $\varphi(x^m) = 1_{H/\beta^*}$, da cui $x^m \subset \omega_H$; pertanto, dal Lemma 1.2, $n|m$. Quindi $m = n$. Se $p(x) = \infty$ e $p(\varphi(x)) = m < \infty$, per quanto detto prima $x^m \subset \omega_H$, da cui $p(x) \leq m < \infty$, cioè una contraddizione.

Lemma 1.3. *Sia H un ipergruppo e sia x un elemento di H di periodo finito n, allora $\forall \{s, t\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ con $s \neq t$, $\mathscr{C}(x^s) \cap \mathscr{C}(x^t) = \emptyset$.*

Dim. Sia per assurdo $u \in \mathscr{C}(x^s) \cap \mathscr{C}(x^t)$; allora $\mathscr{C}(x^s) = \mathscr{C}(u) = \mathscr{C}(x^t)$, da cui $\varphi(x^s) = \varphi(x^t)$, cioè $\varphi(x)^s = \varphi(x)^t$; pertanto, supposto $s > t$, $\varphi(x)^{s-t} = \varphi(x^{s-t}) = 1_{H/\beta^*}$ e quindi $x^{s-t} \subset \omega_H$, il che è assurdo perchè $p(x) = n$ e $s - t < n$.

Teorema 1.6. *Sia H un ipergruppo e sia x un elemento di H di periodo finito n. Allora $\langle \{x\} \rangle = \bigoplus_{r=1}^{n} \mathscr{C}(x^r)$, ove con il simbolo $\oplus$ si intende unione disgiunta.*

Dim. Per il Corollario 1.2, $p(\varphi(x)) = n$, onde $\langle \varphi(x) \rangle = \{\varphi(x), \varphi(x)^2, \dots, \varphi(x)^n\}$.
Per quanto visto nella dimostrazione del Teorema 1.3, $\langle \{x\} \rangle = \varphi^{-1}(\langle \varphi(x) \rangle)$, da cui $\langle \{x\} \rangle$, è unione delle retroimmagini degli elementi di $\langle \varphi(x) \rangle$, cioè di

$\varphi^{-1}\varphi(x)=\mathscr{C}(x)$, $\varphi^{-1}\varphi(x^2)=\mathscr{C}(x^2)\ldots\varphi^{-1}\varphi(x^n)=\mathscr{C}(x^n)$. Infine dal Lemma 1.3 segue l'asserto.

Ricordiamo che un r-ipergruppo H è un ipergruppo tale che $\forall x\in H$ $|\mathscr{C}(x)|=r$. Pertanto, discende subito dal Teorema 1.6 il seguente

Corollario 1.3. *Se H è un r-ipergruppo ed x è un elemento di H di periodo finito n, allora $|\langle\{x\}\rangle|=n\cdot r$.*

2 - Prodotto diretto di sottoipergruppi

Proviamo le seguenti proprietà.

Proposizione 2.1. *Se H è un ipergruppo commutativo, π un insieme di numeri primi e F_π l'insieme degli elementi di H il cui periodo è finito e contiene solo fattori primi appartenenti a π, allora F_π è un sottoipergruppo parte completa di H.*

Dim. Siano $\{x, y\}\subset F_\pi$, $p(x)=n=p_1^{\lambda_1}\cdot p_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot p_r^{\lambda_r}$, $p(y)=m=q_1^{\mu_1}\cdot q_2^{\mu_2}\cdot\ldots\cdot q_s^{\mu_s}$ con $\{p_1, p_2, \ldots, p_r, q_1, q_2, \ldots, q_s\}\subset\pi$. Sia $t=$ m.c.m. (n, m); certamente $t=\alpha_1^{\gamma_1}\cdot\alpha_2^{\gamma_2}\cdot\ldots\cdot\alpha_u^{\gamma_u}$ con $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_u\}\subset\pi$. Si ha $(x\circ y)^t=x^t\circ y^t\subset\omega_H\circ\omega_H=\omega_H$, quindi $\forall z\in x\circ y$ $z^t\subset\omega_H$, da cui per il Lemma 1.2 $p(z)|t$ e quindi $z\in F_\pi$. Cioè $(x\circ y)\subset F_\pi$. Inoltre $\exists z\in H$ tale che $x\in y\circ z$. Proviamo che $z\in F_\pi$. Si ha $x^t\subset(y\circ z)^t$ $=y^t\circ z^t\subset\omega_H\circ z^t=\mathscr{C}(z^t)$, ma $x^t\subset\omega_H$ e pertanto $\omega_H=\mathscr{C}(z^t)$, da cui $z^t\subset\omega_H$ e quindi $p(z)|t$, cioè $z\in F_\pi$. Analogamente si prova che $\exists w\in F_\pi$ tale che $x\in w\circ y$; così F_π è sottoipergruppo di H. Inoltre $\forall u\in\omega_H$ $p(u)=1=q^0$ $\forall q\in\pi$, pertanto $u\in F_\pi$. Da $\omega_H\subset F_\pi$ discende che F_π è parte completa di H.

Conseguenza immediata della Proposizione 2.1, ove si suppone $\pi=\{q\}$, è il seguente

Corollario 2.1. *Se H è un ipergruppo commutativo, q un numero primo e F_q l'insieme degli elementi di H il cui periodo è finito e potenza di q, allora F_q è sottoipergruppo parte completa di H.*

Nota 2.1. Dato un numero primo q, denotiamo con T_q l'insieme degli elementi di H il cui periodo non è divisibile per q.

Proposizione 2.2. *Se H è un ipergruppo commutativo e q un numero primo, allora T_q è sottoipergruppo parte completa di H.*

Dim. Sia π_q l'insieme di tutti i numeri primi diversi da q. Per la Proposizione 2.1, F_{π_q} è un sottoipergruppo parte completa di H. Proviamo che $F_{\pi_q}=T_q$. Sia $x\in F_{\pi_q}$, allora $p(x)=p_1^{\lambda_1}\cdot p_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot p_r^{\lambda_r}$ ove $\forall i\in\{1, 2, \ldots, r\}$ $p_i\in\pi_q$; ma $q\notin\pi_q$ così $\forall i$ $p_i\neq q$ e $q\nmid p(x)$. Pertanto $x\in T_q$. Analogamente si prova che $T_q\subset F_{\pi_q}$.

Proposizione 2.3. *Se H è un ipergruppo commutativo e q_1, q_2 sono numeri primi distinti, allora $F_{q_1}\subset T_{q_2}$ e $F_{q_2}\subset T_{q_1}$.*

Dim. Sia $x\in F_{q_1}$, allora $p(x)=q_1^\lambda$. Certamente $q_2\nmid q_1$, e quindi $q_2\nmid p(x)$, da cui $x\in T_{q_2}$. Pertanto $F_{q_1}\subset T_{q_2}$. Analogamente si vede che $F_{q_2}\subset T_{q_1}$.

Proposizione 2.4. *Se H è un ipergruppo commutativo e q un numero primo, allora $F_q\cap T_q=\omega_H$.*

Dim. Per il Corollario 2.1 e la Proposizione 2.2, $F_q\cap T_q\supset\omega_H$. Viceversa sia $x\in F_q\cap T_q$. Da $x\in F_q$ segue $p(x)=q^\lambda$; $x\in T_q$ implica $q\nmid p(x)$. Perciò $q\nmid q^\lambda$ il che è assurdo a meno che non sia $\lambda=0$, cioè $p(x)=1$ e quindi $x\in\omega_H$. Pertanto $F_q\cap T_q\subset\omega_H$.

Corollario 2.2. *Se H è un ipergruppo commutativo e π è un insieme di numeri primi, allora $\forall q\in\pi$ si ha $F_q\cap F_{\pi-\{q\}}=\omega_H$.*

Dim. Per definizione $F_{\pi-\{q\}}=\{x\in H/p(x)=p_1^{\lambda_1}\cdot p_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot p_r^{\lambda_r}$ con $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}\subset[\pi-\{q\}]\}$, pertanto $F_{\pi-\{q\}}\subset T_q$. Allora $F_q\cap F_{\pi-\{q\}}\subset F_q\cap T_q=\omega_H$. Viceversa, per la Proposizione 2.1 e per il Corollario 2.1, $\omega_H\subset F_q\cap F_{\pi-\{q\}}$.

Lemma 2.1. *Sia H un ipergruppo e sia x un elemento di periodo finito m; allora se $s|m$ si ha $\forall u\in x^s$ $p(u)=m/s$.*

Dim. Poniamo $m/s=t$. Si ha $(x^s)^t=x^{st}=x^m\subset\omega_H$. Pertanto $\forall u\in x^s$ $u^t\subset\omega_H$. Sia $q<t$, allora $sq<st=m$ e quindi $u^q\subset(x^s)^q=x^{sq}\not\subset\omega_H$ perchè $sq<m=p(x)$. Così $p(u)=t$.

Teorema 2.1. *Se H è un ipergruppo e x è un suo elemento di periodo finito $r\cdot s$, allora $\forall u\in x^r$ $\langle\{u\}\rangle$ è sottoipergruppo di $\langle\{x\}\rangle$.*

Dim. $p(x)=rs$ implica, per il Lemma 2.1, $p(u)=s$. Per il Teorema 1.6 $\langle\{u\}\rangle=\bigoplus_{q=1}^{s}\mathscr{C}(u^q)$; ma $u\in x^r$ implica $u^q\subset x^{rq}$, da cui $\forall q\in\{1, 2, \ldots, s\}$ $\mathscr{C}(u^q)=\mathscr{C}(x^{rq})$. Ma $\langle\{x\}\rangle=\bigoplus_{t=1}^{rs}\mathscr{C}(x^t)$ e, poichè $\forall q\in\{1, 2, \ldots, s\}$ $rq\leq rs$, si ha $\langle\{u\}\rangle=\bigoplus_{q=1}^{s}\mathscr{C}(u^q)=\bigoplus_{q=1}^{s}\mathscr{C}(x^{rq})\subset\bigoplus_{t=1}^{rs}\mathscr{C}(x^t)=\langle\{x\}\rangle$.

Def. 2.1. Sia H un ipergruppo e sia $\{K_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottoipergruppi di H. Diciamo che H è *prodotto diretto della famiglia* $\{K_i\}_{i \in I}$, se sono soddisfatte le seguenti tre condizioni:

$$\forall i \in I \quad K_i \text{ è parte completa di } H; \tag{2.1}$$

$$H = \langle \bigcup_{i \in I} K_i \rangle; \tag{2.2}$$

$$\forall j \in I \quad K_j \cap \langle \bigcup_{i \in I - \{j\}} K_i \rangle = \omega_H. \tag{2.3}$$

In tal caso si scrive $H = \boxtimes_{i \in I} K_i$.

Dal Teorema 1.1 e dall'Osservazione 1.1, si deduce la

Osservazione 2.1. Se H è un ipergruppo commutativo e $K_1, K_2, \dots, K_n$ sono sottoipergruppi parte completa di H, allora $\langle \bigcup_{i=1}^{n} K_i \rangle = \circ \prod_{i=1}^{n} K_i$.

Teorema 2.2. *Se H è un ipergruppo commutativo di torsione, cioè tale che tutti i suoi elementi hanno periodo finito, allora $H = \boxtimes_{q \in P_H} F_q$, ove $P_H = \{q$ primi $/ \exists x \in H$ tale che $q | p(x)\}$.*

Dim. Se H è un ipergruppo commutativo di torsione, H/β^* è un gruppo abeliano di torsione, quindi H/β^* è prodotto diretto delle sue componenti primarie S_q, ma per il Corollario 1.2, per ogni primo q si ha $S_q = \varphi(F_q)$, e quindi per il Lemma 3.1 di [4]$_3$ segue la tesi.

Proposizione 2.5. *Se H è un ipergruppo ciclico, allora H è fortemente ciclico.*

Dim. Sia H ciclico con generatore x. Allora $\forall y \in H \; \exists n \in N^*$ tale che $y \in x^n$, ma $x^n \subset \mathscr{C}(x^n) \subset \mathscr{C}(P_{\{x\}})$ ove $P_{\{x\}} = \bigcup_{\substack{t_i \in \{x\} \cup \{x^{-1}\} \\ n \in N^*}} (t_1 \circ t_2 \circ \dots \circ t_n)$, e quindi, per il Teorema 1.2, $y \in \langle \{x\} \rangle$, cioè H è finitamente generato da $\{x\}$.

Osservazione 2.2. Si noti che, in generale non vale il viceversa della Proposizione 2.5, come mostra l'esempio seguente di ipergruppo $H = \langle \{a, b\}, \circ \rangle$, ove: l'iperoperazione «$\circ$» è $a \circ a = \{a\}$, $a \circ b = b \circ a = \{a, b\}$, $b \circ b = \{b\}$, e H è un ipergruppo fortemente ciclico, ma non è ciclico.

Tuttavia se H è un ipergruppo completo tale che $|H/\beta^*| < \infty$, allora H fortemente ciclico implica H ciclico. Infatti se $H = \langle \{x\} \rangle$, per l'Osservazione 1.3, H/β^* è un gruppo ciclico con generatore $\varphi(x)$. Allora $\forall y \in H$, poichè H/β^* è finito,

$\exists n \in N$ tale che $\varphi(y) = \varphi(x)^n$, da cui $y \in \mathscr{C}(x^n) = x^n$, pertanto H è ciclico con generatore x.

Proposizione 2.6. *Sia H un ipergruppo; allora si ha*

$$\textit{se } |H| \leq 3, \; H \textit{ è fortemente ciclico;} \tag{2.4}$$

$$\textit{se } |H| = 4 \textit{ e } H \textit{ non ha struttura di gruppo, } H \textit{ è fortemente ciclico.} \tag{2.5}$$

Dim. Dall'ipotesi segue che $|H/\beta^*| \leq 3$, e poichè tutti i gruppi di ordine minore o uguale a tre sono ciclici, per l'Osservazione 1.3, segue la tesi.

Bibliografia

[1] R. H. Bruck, *A survey of binary systems*, Springer-Verlag, Berlin 1966.

[2] P. Corsini: [•]$_1$ *Hypergroupes d'associativité des quasigroupes mediaux*, Atti Convegno su «Sistemi binari e loro applicazioni», Taormina (1978), 7-22; [•]$_2$ *Sur les semi-hypergroupes complètes et les groupoides*, Atti Soc. Peloritana Sci. Fis. Mat. Natur. **26** (1980); [•]$_3$ *Contributo alla teoria degli ipergruppi*, Atti Soc. Peloritana Sci. Fis. Mat. Natur. **26** (1980).

[3] P. Corsini e G. Romeo, *Hypergroupes complètes et $\mathscr{T}$groupoides*, Atti Convegno su «Sistemi binari e loro applicazioni», Taormina (1978), 129-146.

[4] M. De Salvo: [•]$_1$*Sugli ipergruppi completi finiti*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) 8 (1982), 269-280; [•]$_2$ *Su le potenze ad esponente intero in un ipergruppo e gli r-ipergruppi*, Riv. Mat. Univ. Parma (4) **11** (1985), 409-421; [•]$_3$ *Sugli ipergruppi commutativi finitamente generati*, Matematiche (Catania), in corso di stampa.

[5] M. De Salvo e D. Freni: [•]$_1$ *Semi-iperguppi e ipergruppi ciclici*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **30** (1981), 44-59; [•]$_2$ *Sugli ipergruppi ciclici e completi*, Matematiche (Catania) **35** (1980), 211-226.

[6] M. Dresher and O. Ore, *Theory of multigroups*, Amer. J. Math. **60** (1938).

[7] D. Freni: [•]$_1$ *Ipergruppi ciclici e torsione negli ipergruppi*, Matematiche (Catania) **35** (1980), 270-286; [•]$_2$ *Sugli r-ipergruppi e gli ampliamenti*, Atti Soc. Peloritana Sci. Fis. Mat. Natur. (1982).

[8] M. Koskas, *Groupoides, demi-hypergroupes et hypergroupes*, J. Math. Pures Appl. **49** (1970), 155-192.

[9] A. Machì, *Introduzione alla teoria dei gruppi*, Feltrinelli, Milano 1974.

[10] J. Mittas, *Hypergroupes canoniques*, Math. Balkanica **2** (1972), 165-179.

[11] Y. Sureau, *Thèse de doctorat d'état*, Universitè de Clermont II (1980).

[12] G. Zappa, *Fondamenti di teoria dei gruppi* (I), Edizioni Cremonese, Roma 1965.

Summary

In **1** *we introduce the finitely generated hypergroups and characterize their structure, considering in particular the hypergroups generated by a singleton (strongly cyclic hypergroups).*

In **2** *we extend to hypergroups the notion of direct product and generalize a known result of group theory to commutative torsion hypergroups.*

* * *