

Riccardo Migliari

Geometria descrittiva

Volume I - Metodi e costruzioni

Contributi di

Leonardo Baglioni, Laura Carlevaris, Andrea Casale, Stefano Cinti Luciani
Marco De Angelis, Laura De Carlo, Anna De Santis, Federico Fallavollita
Marco Fasolo, Marta Salvatore, Alberto Sdegno

Riccardo Migliari

Geometria descrittiva

Volume I

Metodi e costruzioni

Contributi di

Leonardo Baglioni, Laura Carlevaris, Andrea Casale, Stefano Cinti Luciani
Marco De Angelis, Laura De Carlo, Anna De Santis, Federico Fallavollita
Marco Fasolo, Marta Salvatore, Alberto Sdegno

Proprietà letteraria riservata
© 2009 De Agostini Scuola SpA – Novara
1ª edizione: maggio 2009
Printed in Italy

Tutti i diritti riservati. Nessuna parte del materiale protetto da questo copyright potrà essere riprodotta in alcuna forma senza l'autorizzazione scritta dell'Editore.

Fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume/fascicolo di periodico dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68, comma 4, della legge 22 aprile 1941 n. 633.

Le riproduzioni ad uso differente da quello personale potranno avvenire, per un numero di pagine non superiore al 15% del presente volume/fascicolo, solo a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da AIDRO – Corso di Porta Romana, 108 – 20122 Milano – e-mail: segreteria@aidro.org

Stampa: Stamperia Artistica Nazionale - Trofarello (TO)

Ristampe:	0 1	2 3	4 5	6 7	8 9
Anno:	2009	2010	2011	2012	2013

Indice

XI *Gli autori*

XIII *Prefazione*

Parte prima – *Metodi*

5 **Capitolo 1 – Elementi di geometria proiettiva**

di Riccardo Migliari

- 5 1.1 Gli enti geometrici fondamentali
- 6 1.2 Convenzioni
- 7 1.3 L'operazione di proiezione
- 9 1.4 L'ampliamento proiettivo dello spazio euclideo
- 12 1.5 Le forme geometriche fondamentali
- 13 1.6 Le proprietà invarianti
- 15 1.7 L'omografia
- 17 1.8 L'omologia piana
- 21 1.9 I casi particolari di omologia piana
- 24 1.10 L'omologia solida

26 **Capitolo 2 – Elementi di geometria solida**

di Riccardo Migliari

- 26 2.1 Appartenenza
- 27 2.2 Parallelismo
- 28 2.3 Perpendicolarità
- 30 2.4 Angoli
- 31 2.5 Intersezioni

34 **Capitolo 3 – Rappresentazione prospettica**

di Andrea Casale

- 34 3.1 Genesi dell'immagine prospettica
- 34 3.2 Rappresentazione degli enti fondamentali
- 41 3.3 Condizioni di appartenenza, di parallelismo e di complanarità
- 44 3.4 Le costruzioni fondamentali della prospettiva
- 48 3.5 La soluzione dei problemi di misura
- 62 3.6 Breve storia della prospettiva

66 **Capitolo 4 – Rappresentazione in pianta e alzato**

di Marco Fasolo

- 66 4.1 Rappresentazione degli enti geometrici fondamentali
- 69 4.2 Rappresentazione di enti geometrici in posizione particolare
- 73 4.3 Costruzioni elementari o fondamentali
- 80 4.4 Costruzione di relazioni appartenenza e posizione
- 83 4.5 Costruzioni elementari relative alla perpendicolarità
- 87 4.6 Misure elementari e costruzioni relative
- 95 4.7 Costruzione di alcune figure elementari
- 97 4.8 Rappresentazione di una schiera di cubi librati nello spazio
- 97 4.9 Breve storia del metodo di rappresentazione in pianta e alzato

- 108 **Capitolo 5 – Rappresentazione quotata**
di Laura Carlevaris
- 108 5.1 Genesi della proiezione quotata
- 109 5.2 Rappresentazione degli enti geometrici fondamentali
- 116 5.3 Rappresentazione degli enti geometrici fondamentali in posizione particolare
- 119 5.4 Costruzioni elementari o fondamentali
- 128 5.5 Condizioni di appartenenza e parallelismo
- 132 5.6 Problemi metrici fondamentali: misura e ortogonalità
- 140 5.7 Rappresentazione di un tetto
- 145 5.8 Rappresentazione delle superfici topografiche
- 148 5.9 Breve storia della rappresentazione quotata
- 153 **Capitolo 6 – Rappresentazione in prospettiva parallela (assonometria)**
di Laura De Carlo
- 153 6.1 Generalità
- 154 6.2 Proiezione parallela ortogonale
- 6.2.1 Genesi spaziale della prospettiva parallela ortogonale, p. 154 – 6.2.2 Rappresentazione degli enti geometrici fondamentali, p. 156 – 6.2.3 Rappresentazione degli enti geometrici fondamentali in posizione particolare, p. 158 – 6.2.4 Costruzioni elementari o fondamentali, p. 162 – 6.2.5 Costruzione di relazioni di appartenenza e posizione, p. 166 – 6.2.6 Costruzioni elementari relative alla perpendicolarità, p. 169 – 6.2.7 Misure elementari e costruzioni relative, p. 175
- 182 6.3 Proiezione parallela obliqua
- 6.3.1 Genesi spaziale della prospettiva parallela obliqua, p. 182 – 6.3.2 Rappresentazione degli enti geometrici fondamentali, p. 183 – 6.3.3 Rappresentazione degli enti geometrici fondamentali in posizione particolare, p. 186 – 6.3.4 Costruzione di relazioni di appartenenza e posizione, p. 189 – 6.3.5 Costruzioni elementari o fondamentali, p. 190 – 6.3.6 Costruzioni elementari relative alla perpendicolarità, p. 191 – 6.3.7 Misure elementari e costruzioni relative, p. 197
- 201 6.4 Breve storia della rappresentazione prospettiva parallela
- 206 **Capitolo 7 – Rappresentazione matematica**
di Stefano Cinti Luciani, Riccardo Migliari
- 206 7.1 Premessa sui metodi di rappresentazione informatica
- 207 7.2 La rappresentazione matematica
- 213 7.3 Rappresentazione degli enti geometrici fondamentali
- 216 7.4 Rappresentazione di enti geometrici in posizione particolare
- 220 7.5 Alcune costruzioni elementari
- 224 7.6 Breve storia della rappresentazione matematica
- 228 **Capitolo 8 – Rappresentazione numerica o poligonale**
di Marco De Angelis, Riccardo Migliari, Alberto Sdegno
- 228 8.1 Generalità
- 233 8.2 Rappresentazione di enti geometrici in posizione particolare
- 239 8.3 Alcune costruzioni elementari
- 245 8.4 Breve storia della rappresentazione numerica
- Parte seconda – Costruzioni**
- 255 **Capitolo 1 – Costruzione di relazioni di appartenenza e posizione**
di Riccardo Migliari
- 255 1.1 Costruzione della retta orizzontale r che appartiene a un piano generico e ha una data quota
- 255 1.2 Costruzione del punto P intersezione di tre piani α , β e γ dati
- 256 1.3 Costruzione della retta q che passa per un punto P e si appoggia a due rette sghembe r e s

Rappresentazione numerica o poligonale*

Marco De Angelis, Riccardo Migliari, Alberto Sdegno

8.1 Generalità

La rappresentazione numerica, più comunemente nota come rappresentazione poligonale, si basa su un semplice concetto: qualsiasi forma geometrica può essere ridotta a un poliedro. Se pensiamo, ad esempio, alla superficie curva di una roccia di granito levigata dal mare, ci rendiamo conto che l'impressione di continuità suscitata da questa forma naturale è in realtà dovuta alla miriade di faccette, piane, dei cristalli di ortoclasio, quarzo e mica che la compongono. È evidente che il poliedro sarà tanto più simile alla superficie che rappresenta quanto maggiore sarà il numero delle facce. Se le macchine fossero in grado di elaborare i dati relativi a un numero indefinito di facce, il poliedro potrebbe rappresentare la superficie con la stessa accuratezza di una rappresentazione matematica, tenendo conto dei limiti di cui si è discusso nel capitolo precedente. Ma, naturalmente, allo stato dell'arte, non è possibile raggiungere questo livello di precisione e perciò la rappresentazione numerica di una superficie è sempre grossolana, se raffrontata con l'accuratezza di una rappresentazione matematica. Ad esempio, una sfera è rappresentata per mezzo di un solido elementare, come l'icosaedro che ha venti facce piane triangolari, oppure per mezzo di un poliedro complesso che può avere un numero maggiore, ma sempre limitato, di facce piane. Infatti occorre contenere il numero dei poligoni che compongono il modello, onde evitare di superare le capacità di cal-

colo della macchina. Di conseguenza, la rappresentazione numerica, o poligonale, è in grado di descrivere *esattamente* solo le figure a facce piane, mentre descrive le superfici curve sempre e soltanto attraverso una approssimazione. In compenso, il modello numerico può essere elaborato direttamente dalle schede grafiche che, nel computer, eseguono le operazioni relative alla visualizzazione. Per questa ragione la rappresentazione numerica è particolarmente adatta al controllo formale del progetto, in analogia con il metodo grafico della prospettiva, così come la rappresentazione matematica è invece adatta al controllo metrico del progetto, in analogia con i metodi grafici della pianta, dell'alzato e, in certa misura, dell'assonometria. In ragione dell'impiego prevalente del metodo, i programmi per la rappresentazione poligonale non utilizzano una vera unità di misura; infatti, se si costruisce un oggetto e si modifica poi l'unità di misura, le dimensioni cambiano senza però alterare la grandezza apparente dell'oggetto; in altre parole due input rispettivamente di 100 m e 100 mm producono due segmenti identici.

L'ente geometrico elementare della rappresentazione numerica è dunque il poligono e, in particolare, il triangolo, che, come è noto, è il più semplice poligono che possa essere costruito. Gli altri enti geometrici, come il punto e la retta, possono essere costruiti, ma di norma non vengono visualizzati nella resa chiaroscurale, detta *rendering*, se non fanno parte di uno o più poligoni. Di conseguenza,

* In particolare il paragrafo 8.4 è a cura di Alberto Sdegno.

adottati questi parametri: larghezza 2000, altezza 2000, entrambe le divisioni 5.

- *Funzioni / Rendi modificabile*: converte la rappresentazione matematica in rappresentazione numerica.
- *Strumenti / Poligoni*: attiva la selezione dei poligoni.
- *Selezione / Seleziona tutto*: seleziona tutti i poligoni.
- *Struttura / Estrudi internamente*: escludendo la modalità «preserva gruppi», il comando crea i poligoni necessari per dare spessore ai segmenti che attualmente dividono le celle della griglia. Nel nostro esempio lo spessore misura 5 unità. Dopo aver applicato il comando, i poligoni al centro restano selezionati e si possono perciò cancellare, tutti in una volta.
- *Selezione / Seleziona tutto*: seleziona nuovamente tutti i poligoni, che sono quelli appena creati.
- *Struttura / Estrudi*: attivando la modalità «preserva gruppi» il software assegna uno spessore alla griglia, ancora di 5 unità nell'esempio.
- *Modifica / Copia - Incolla*: permette di creare una copia della griglia, che potrà essere ruotata per disporla in giacitura verticale.
- *Oggetto / Primitive / Cubo*: crea un prisma rettangolo in rappresentazione matematica, è possibile fissare le misure dei lati, che, nel nostro esempio misurano 390 unità in modo che il prisma sia realmente un cubo e vada a riempire gli spazi vuoti della griglia.
- *Funzioni / Rendi modificabile*: converte la rappresentazione matematica del cubo in rappresentazione numerica e permette, così, di traslare il cubo in posizione, in uno dei vuoti cioè, dopo avere traslato il sistema di riferimento locale su uno dei vertici inferiori. Gli altri sette cubi sono stati creati copiando il primo e, successivamente, sono stati sollevati nello spazio.

8.4 Breve storia della rappresentazione numerica

Una pluralità di registri descrittivi di una forma convive fin da principio negli algoritmi di definizione di una geometria. Se infatti è abbastanza evidente la distinzione tra elementi bidimensionali e tridimensionali nel mondo fisico, vale a dire tra gli enti geometrici presenti su di un piano generico e quelli che insistono nello spazio cartesiano stereometrico, quando si affronta il medesimo tema nello spazio digitale dell'elaboratore elettronico, è possibile incontrare una molteplicità di primitive grafiche – e di procedure di disegno – che permettono la costruzione di una stessa geometria. Al disegno nel piano e nello spazio, cui corrisponde la rappresentazione 2D e 3D, infatti, si associa anche una composizione denominata «2.5 D» che, a partire dalla geometria planare, consente tramite una semplice estrusione perpendicolare al piano, di ottenere un elemento tridimensionale. A ciò si devono aggiungere i tentativi di descrivere in forma digitale poliedri, superfici rigate, superfici di rotazione e generiche che hanno visto nelle sperimentazioni degli anni Cinquanta e Sessanta del secolo scorso presso il Massachusetts Institute of Technology di Boston, il livello più avanzato della ricerca. Si vedano a titolo di esempio gli innumerevoli rapporti scientifici presenti negli archivi del MIT a firma di Douglas T. Ross che a partire dalla seconda metà degli anni Cinquanta, hanno definito la struttura teorica del linguaggio descrittivo di una geometria, grazie a un sistema chiamato APT (*Automatic Programming Language*). Proprio questo sistema, infatti, consentirà le prime enunciazioni algoritmiche di piani, sfere, coni, cilindri, che entreranno nella realtà elettronica della programmazione, sebbene con una finalità soprattutto materica (per la gestione di macchine e la creazione di pezzi fisici), piuttosto che visiva, dal momento che la visualiz-

zazione su schermo grafico interattivo avverrà solo nei primi anni Sessanta.

Un caso, in particolare, è degno di nota, dal momento che consente di capire la complessa relazione che per vari anni ha regolato i rapporti tra enunciazione matematica e costruzione numerica. Si tratta del rapporto di ricerca MAC-TR-41, dal titolo *Surfaces for Computer-Aided Design of Space Forms*, licenziato nel giugno del 1967, al cui autore Steven A. Coons si dovranno ascrivere importanti risultati scientifici nel settore del CAD. Coons, infatti, si pone il problema di risolvere la rappresentazione di superfici nello spazio grazie al disegno di una serie di curve sghembe, generate per via matematica, alle quali si incardinano superfici di natura prettamente numerica, essendo definite grazie a punti sulla curva stessa uniti da facce piane nello spazio. Il sintetico abstract con cui Coons introduce il lettore al citato rapporto è a questo riguardo assolutamente esemplare: «Il progetto di aerei, navi, automobili e delle cosiddette “parti scultoree” comporta il disegno, la delineazione, e la descrizione matematica di superfici a doppia curvatura di tipo *free-form* di carattere molto generale. Una estensione di queste idee alle iper-superfici in uno spazio di dimensione maggiore è anche indicato»². Nella relazione è descritto il metodo innovativo di costruzione delle superfici sopra menzionato, il cui algoritmo – oltre a prendere il nome del proprio autore – sopravvive ancora oggi in alcuni software di modellazione, nonostante le novità introdotte dalle tecniche di *solid modeling* e di generazione tramite NURBS. L'intento dell'autore – che costituisce la vera novità rispetto ai contributi precedenti – è descritto dallo stesso Coons: «In passato – egli scrive – il tema delle matematiche di superficie è stato indagato, in geometria analitica e in geometria differenziale, dal punto di vista dell'analisi delle proprietà geometriche delle superfici che già esistono, ma poca letteratura è stata prodotta sul tema della crea-

zione di tali superfici»³. L'innovazione introdotta in questo caso, quindi, va nella direzione della semplificazione costruttiva per la progettazione di nuove forme: «Lo stesso disegnatore – aggiunge lo studioso – non deve sapere o curarsi dei dettagli matematici, non più di quanto deve sapere della specifica composizione delle matite con le quali scrive o della meccanica delle *splines* con cui egli ora disegna curve»⁴. Coons analizza i modi in cui fusoliere di aereo e carene di nave sono realizzate, e osserva che da alcune poche linee iniziali si deve necessariamente passare – attraverso una addizione di ulteriori curve – a geometrie più complesse, per migliorare la descrizione della morfologia. «Come queste curve addizionali sono introdotte – prosegue Coons – la superficie originale dovrà essere suddivisa in *patches*, ma l'algoritmo garantirà automaticamente la continuità della pendenza e curvatura della superficie (se richiesta) e vedrà incorporate tali curve addizionali nella superficie automaticamente»⁵ (figura 8.25). Come detto in precedenza, quindi, l'operazione condotta da Coons consentiva di operare con curve gobbe – cioè entità continue – collegate tra loro alle estremità, e di generare una superficie composta da singole facce – quindi elementi discreti –: ed è proprio su questo singolare esempio di trasformazione di una espressione matematica in un esito poligonale che si configurerà gran parte della ricerca sulla modellazione di superficie⁶.

Come abbiamo visto, però, è difficile asserire che il testo di Coons sia fondativo rispetto a una disciplina dal momento che esistono molteplici contributi, fin dalla metà degli anni Quaranta del XX secolo, che hanno affrontato il problema sia dal punto di vista teorico che applicativo. Basti pensare che nel 1944 esce il volume di Roy A. Liming⁷ che descrive per la prima volta la combinazione di metodi grafici di disegno tradizionale con tecniche di descrizione numerica, per la rappresentazione di su-

² S.A. Coons, *Surfaces for Computer-Aided Design of Space Form*, Project MAC, MIT, Boston Mass. 1967, p. III.

³ *Ibidem*, p. 1.

⁴ *Ibidem*, p. 1.

⁵ *Ibidem*, p. 4.

⁶ Per i riferimenti ai concetti di modellazione matematica e numerica si fa riferimento a quanto espresso da Riccardo Migliari nel presente volume. Si vedano anche i volumi di e a cura di Migliari: *Geometria dei modelli. Rappresentazione grafica e informatica per l'architettura e per il design*, Kappa, Roma 2003; *Disegno come modello. Riflessioni sul disegno nell'era informatica*, Kappa, Roma 2004.

⁷ R.A. Liming, *Practical Analytic Geometry with Applications to Aircraft*, Macmillan, New York 1944.

perfici a doppia curvatura relative a parti di aeroplano. Per primo, infatti, Liming associò numeri a disegni lineari di fusoliere e cabine di guida di aerei, in modo da permettere una univoca modalità di registrazione di un disegno. Sarà proprio da un approfondimento di questo studio che partirà Coons⁸, dopo qualche anno, per le sue ricerche sul disegno algoritmico delle superfici complesse. Nel frattempo il matematico Isaac Jacob Schoenberg stava approfondendo le sue sperimentazioni – iniziate presso la University of Pennsylvania – sulla teoria delle *splines*⁹ in termini matematici, con l'introduzione di quelle curve chiamate *B-splines*. Se il termine *spline*, infatti, ha origini antiche nel campo della storia della costruzione delle imbarcazioni – si tratta di aste flessibili che venivano modificate nella forma grazie ad alcuni punti di controllo chiamati «anatre» per la particolare conformazione – le *B-splines*, dove la B sta per *basis*, riconducono tutte le *splines* a una caratterizzazione di base, tanto che si può affermare che «ogni curva *spline* può essere scritta come curva *B-spline*»¹⁰ e la conoscenza specifica di questa geometria sarà di fondamentale aiuto per la costruzione delle *forme-libere* digitali.

La grande richiesta di precisione geometrica proveniente dall'industria privata nel decennio successivo – in particolar modo nel settore automobilistico e aeronautico – ha indubbiamente favorito la ricerca nel campo delle tecnologie avanzate per la costruzione di superfici composite. Soprattutto se pensiamo che, come abbiamo già accennato, proprio negli anni Cinquanta l'avvento delle macchine a controllo numerico per la produzione di prototipi e di parti meccaniche richiedeva geometrie con un livello di approssimazione sempre migliore. Un'alta concorrenza, però, ha determinato uno slittamento nel tempo della pubblicazione dei risultati di quelle sperimentazioni, tanto che solo negli anni Sessanta sono stati resi noti alcuni esiti significativi del decennio precedente. Si pensi, ad esempio, alle

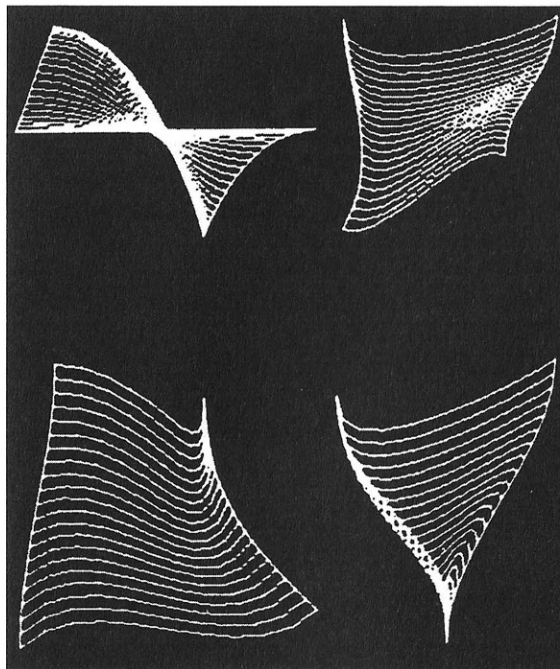


Fig. 8.25

ricerche alla Boeing condotte da D. MacLaren¹¹ e J. Ferguson¹², grazie alle quali è stato sviluppato un tipo differente di curva per il disegno delle ali, suddividendo la geometria grazie all'uso di punti di controllo, con una modalità simile alla procedura che si usa per i modelli fisici. Parallelamente iniziavano anche le collaborazioni tra IBM e General Motors che permisero la costruzione del sistema di disegno DAC¹³, mentre al MIT Ivan E. Sutherland¹⁴ stava mettendo a punto il sistema *Sketchpad* che avrebbe introdotto novità sostanziali nella grafica al calcolatore; alla stessa GM, inoltre, operava Carl R. de Boor che, avendo lavorato con Schoenberg, aveva il compito di sviluppare procedure usando le *B-spline*¹⁵.

Fig. 8.25 Rappresentazione multipla di una superficie con l'algoritmo di Coons

⁸ S.A. Coons, *Graphical and Analytical Methods as Applied to Aircraft Design*, «Journal of Engineering Education», 37, 10, 1947.

⁹ I.J. Schoenberg, *Contributions to the Problem of Approximation of Equidistant data by Analytic Functions*, «Quart. Appl. Math.», 4, 1946, pp. 45-99.

¹⁰ G. Farin, *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, Boston 1988, p. 301.

¹¹ D. MacLaren, *Formulas for Fitting a Spline Curve through a Set of Points*, «Boeing Appl. Math. Rpt.», 2, 1958.

¹² J. Ferguson, *Multivariable Curve Interpolation*, «Journal of ACM», 11, 2, 1964, pp. 221-28.

¹³ DAC è l'acronimo di *Design Augmented by Computer*, che possiamo tradurre con «progettazione potenziata dal calcolatore».

¹⁴ I.E. Sutherland, *Sketchpad. A Man-Machine Graphical Communication System*, PhD. thesis, MIT, Boston Mass. 1963.

¹⁵ In particolare si veda: C. de Boor, *Bicubic Spline Interpolation*, «Journal of Math. Phys.», 41, 1962, pp. 212-18; Id., *On calculating with B-splines*, «Journal of Approx. Theory», 6, 1, 1972, pp. 50-62.

¹⁶ Alcune indicazioni sono conservate in rapporti di ricerca della Citroën di difficile accesso, tra cui: P. de Casteljou, *Outillages méthodes calcul*, Technical report, A. Citroën, Parigi 1959; Id., *Corbe set surfaces à pôles*, Technical report, A. Citroën, Parigi 1963. Solo due decenni dopo, invece, vedrà la luce una trattazione esaustiva nel volume: Id., *Formes à Pôles*, Hermès, Parigi 1985 e soprattutto Id., *Shape Mathematics and CAD*, Kogan Page, London 1986.

¹⁷ In particolare sulla rivista «Automatisme»: P. Bézier, *Définition numérique des courbes et surfaces I*, «Automatisme», 11, 1966, pp. 625-632 ; Id., *Procédé de définition numérique des courbes et surfaces non mathématiques*, «Automatisme», 13, 1968.

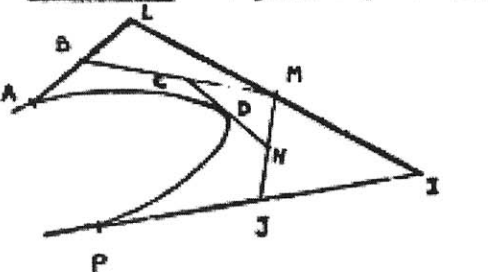
¹⁸ La più completa trattazione di tale sistema si trova in: P. Bézier, *The mathematical basis of the UNISURF CAD System*, Butterworths, Londra 1986.

In Europa negli stessi anni il problema veniva affrontato soprattutto alla Citroën e alla Renault: era lì infatti che si stavano sperimentando le modalità per riuscire a descrivere in maniera esaustiva le curvature che avranno poi caratterizzato la produzione delle note carrozzerie. Grazie a due giovani ricercatori – Paul de Faget de Casteljou e Pierre Bézier, che lavoravano rispettivamente presso le due industrie francesi – sono stati sviluppati gli algoritmi che hanno consentito la descrizione accurata di superfici curve. La novità introdotta da de Casteljou è stata la definizione di poligoni di controllo esterni alla curva, chiamati da lui *courbes à pôles* (figura 8.26). Invece di determinare una curva o una superficie con alcuni punti collocati sopra di essa, il poligono di controllo usava punti prossimi all'elemento. Non si interveniva sulla curva stessa, quindi, ma si operava sul poligono relativo. Sebbene questa idea non era stata mai avanzata da alcuno

studioso, essa non risulta essere presente in alcuna pubblicazione ufficiale, poiché fu resa pubblica solo tardivamente¹⁶.

Analogamente Bézier stava affrontando medesime questioni alla Renault, essendo a capo del dipartimento che si occupava di design. È noto che i suoi risultati sono stati influenzati dalla conoscenza degli sviluppi della ricerca alla Citroën, pur essendo differente il suo modo di procedere. In estrema sintesi l'idea di Bézier era di rappresentare una curva elementare come intersezione di due cilindri ellittici, ancorati all'interno di un parallelepipedo (figura 8.27). Deformando il parallelepipedo si otteneva la variazione anche della curva. A differenza di quelle di de Casteljou, le ricerche di Bézier hanno avuto una larga diffusione nella comunità scientifica¹⁷, e il sistema UNISURF¹⁸ da lui ideato ha costituito la base per la restituzione di geometrie complesse. Nell'introduzione al volume che espone in maniera sistematica le tipologie degli elementi geometrici considerati dal sistema, l'autore dichiara

Remarque 1 - Le point L peut être extérieur à A



Dans le c
La constr
elle est

Remarque

$$P = \lambda^3 A + 3\lambda^2 \mu |$$

$$\lambda = 1 - \mu$$

$$A (1 - 3\mu + 3\mu^2$$

$$+ B (3\mu - 6\mu^2$$

$$+ C | + 3\mu^3$$

$$+ D | +$$

$$P = OA - 3\mu \cdot AB$$

$$\vec{B} = \lambda \vec{AB}$$

$$\vec{C} = \lambda \vec{BC} + \mu \vec{AB}$$

$$\vec{D} = \lambda \vec{CD} + \mu \vec{BC}$$

$$\vec{E} = \lambda \vec{DE} + \mu \vec{CD}$$

$$\vec{M} = 3\lambda^2 \mu \vec{AB} + 3\lambda \mu^2 \vec{BC} + \mu^3 \vec{CD}$$

$$\vec{N} = 3\lambda \mu^2 \vec{AB} + 3\lambda^2 \mu \vec{BC} + \mu^3 \vec{CD}$$

$$\vec{J} = \lambda^3 \vec{AB} + 3\lambda^2 \mu \vec{BC} + 3\lambda \mu^2 \vec{CD} + \mu^3 \vec{DE}$$

$$\vec{P} = \lambda^3 \vec{AB} + 3\lambda^2 \mu \vec{BC} + 3\lambda \mu^2 \vec{CD} + \mu^3 \vec{DE}$$

Fig. 8.26 Descrizione di de Casteljou relativa al proprio algoritmo

Fig. 8.27 Curva elementare dell'algoritmo di Bézier

Fig. 8.26

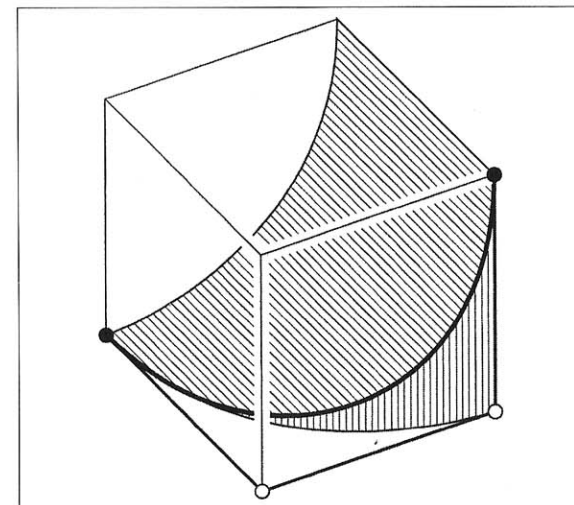


Fig. 8.27

che «l'idea alla base era che in un sistema convenzionale, ogni passo dal modello iniziale agli schizzi, ai plastici di studio, ai disegni finali, fino agli stampi realizzati a mano, introduceva deformazioni. Con il nuovo sistema, l'informazione condotta dalle figure e dai disegni sarebbe stata priva di alcuna alterazione»¹⁹.

L'importanza di UNISURF, comunque, non deve essere rintracciata soltanto nell'utilizzo che verrà fatto dalla Renault; esso infatti influenzerà lo sviluppo della ricerca industriale anche di altre significative società, tra cui la francese Dassault, produttrice di unità aeronautiche, che in seguito, grazie alle specifiche stabilite da Bézier realizzò un proprio sistema CAD, in collaborazione con la IBM, denominato CATIA²⁰.

Al rigore matematico della costruzione delle curve nello spazio, che già in quegli anni aveva raggiunto un ottimo livello di indagine, faceva seguito ancora una volta il registro numerico della descrizione delle superfici, che limitava la verosimiglianza della visualizzazione. Non è un caso che tra i principali argomenti di discussione della prima conferenza dedicata alla rappresentazione geometrica assistita da computer, la *Computer Aided Geometric Design* del marzo 1974 tenutasi presso la University of Utah, siano poste le questioni relative ai metodi per il miglioramento qualitativo della resa tridimensionale di un oggetto: rendere continuo il discreto, smussare superfici adiacenti, migliorare la resa degli elementi ai margini della figura, sono pertanto tra i principali temi di dibattito, così come presentati dai due curatori degli atti, Robert E. Barnhill e Richard F. Riesenfeld²¹. Tra i relatori della conferenza troviamo personalità che svolgevano e avrebbero svolto nel futuro un ruolo fondamentale, quali S.A. Coons, P. Bézier, A.R. Forrest, R.F. Wieling, M.E. Newell, E. Catmull. Pur essendo tutti i contributi di grande rilievo, i saggi significativi per gli approfondimenti relativi a problemi geometrici so-

no soprattutto quello di Coons, dal titolo *Surface Patches and B-Spline Curves*²² in cui l'autore affronta il problema della discontinuità di una *B-spline* e degli esiti che questa può portare alla creazione di una *patch*; quello di Forrest, in cui il relatore si sofferma ad affrontare il tema nei suoi aspetti generali, pensando alla geometria *fuzzy* come a un metodo per risolvere i problemi di smussatura delle superfici²³ (figura 8.28); quello di Bézier, in cui, facendo una breve storia di UNISURF, il matematico ne descrive in forma sintetica le caratteristiche, in riferimento soprattutto alla realizzazione di prototipi con macchine a controllo numerico²⁴, proponendo una soluzione al problema della rappresentazione degli spigoli contigui, con l'incremento del numero delle facce di confine (figura 8.29). Pur non affrontando il tema della costruzione del modello, ma quello della sua visualizzazione, bisogna segnalare anche il

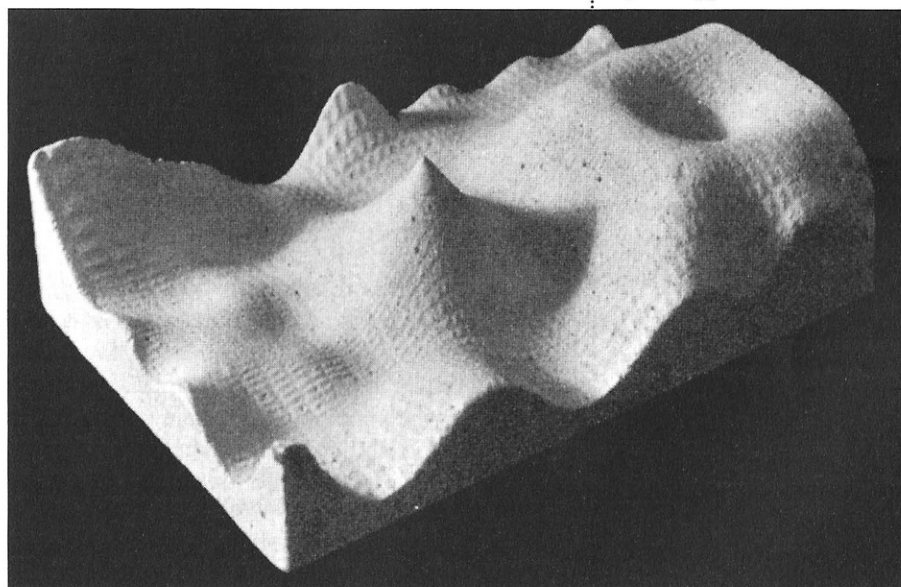


Fig. 8.28

Fig. 8.28 Modello fisico di verifica della smussatura della superficie (Forrest)

¹⁹ *Ibidem*, p. 1.

²⁰ CATIA è l'acronimo di *Computer Aided Three-dimensional Interactive Application*, cioè «applicazione interattiva tridimensionale assistita da calcolatore».

²¹ R.E. Barnhill, R.F. Riesenfeld (a cura di), *Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, New York 1974, atti della conferenza tenuta presso la University of Utah, il 18-21 marzo 1974.

²² *Ibidem*, pp. 1-16.

²³ A.R. Forrest, *Computational Geometry - Achievements and Problems*, in Barnhill, Riesenfeld (a cura di), *Computer Aided Geometric Design*, cit., pp. 17-44.

²⁴ P. Bézier, *Mathematical and Practical Possibilities of Unisurf*, in Barnhill, Riesenfeld (a cura di), *Computer Aided Geometric Design*, cit., pp. 127-52.

Fig. 8.29 Trattamento degli spigoli contigui con l'algoritmo di Bézier

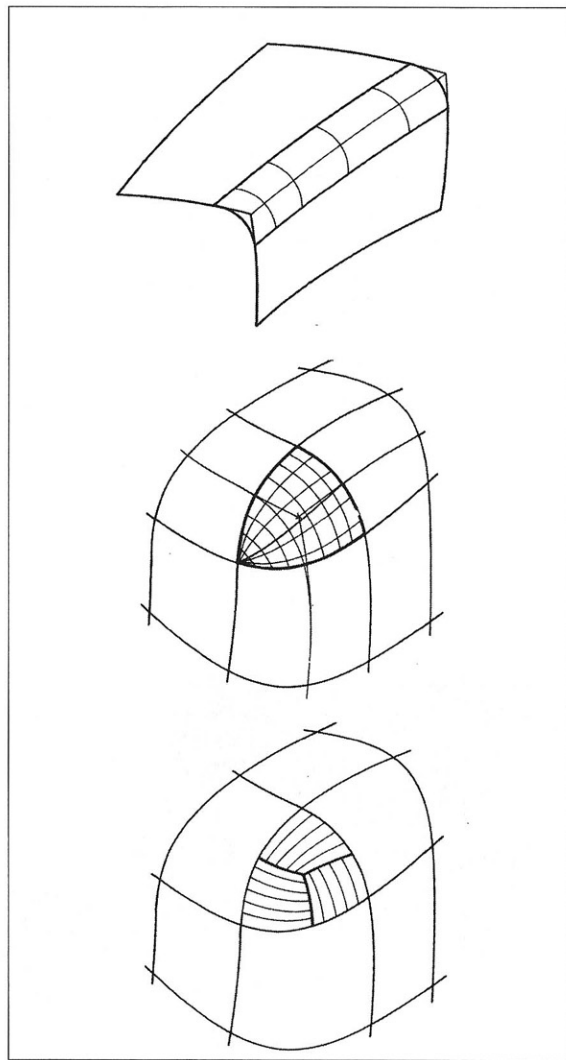


Fig. 8.29

²⁵ M.E. Newell, *Man Machine Communication in Three Dimension*, in Barnhill, Riesenfeld (a cura di), *Computer Aided Geometric Design*, cit., pp. 303-15.

²⁶ Il termine può essere tradotto in *B-spline* razionali non uniformi.

²⁷ K. Vesprille, *Computer Aided Design Applications of the Rational B-spline Approximation Form*, PhD thesis, Syracuse University, New York 1975.

²⁸ S. Coons, *Rational Bicubic Surface Patches*, Project MAC Technical report, MIT, Boston Mass. 1968.

²⁹ A.R. Forrest, *Curves and Surfaces for Computer-Aided Design*, PhD thesis, Cambridge 1968.

contributo di Martin E. Newell²⁵, che descrive lo stato dell'arte sugli strumenti di input e output, con una particolare attenzione anche alle sperimentazioni dei sistemi di visualizzazione stereoscopica

mobile di tipo HMD (Head Mounted Display). Newell tra l'altro, proprio in quel periodo, stava ricostruendo il modello 3D della nota teiera parametrica, utilizzando le *patches* bicubiche di Bézier, poi sottoposta a rappresentazione realistica da James Blinn, che diventerà l'icona delle procedure di rendering di molti software di rappresentazione verosimile digitale.

Pur dovendo affrontare soprattutto il tema della modellazione numerica, è forse necessario prendere in esame brevemente anche il sistema rivoluzionario di declinazione esclusivamente matematica di una geometria, introdotto con le superfici NURBS. C'è da dire innanzitutto che non è nota l'origine del termine NURBS, acronimo che sta per *Non-Uniform Rational B-Spline*²⁶, ma si fa riferimento alla tesi PhD di Ken Vesprille²⁷ come al primo sistematico tentativo di sviluppare tale metodica, pur se il testo non contiene tale acronimo. Vesprille, quale studente di Coons, ha ripreso un tema già affrontato dallo studioso²⁸ e successivamente anche da A.R. Forrest²⁹. Sostanzialmente le *B-spline* possono essere parametrizzate su intervalli di lunghezza unitaria o di lunghezza differente. Rispetto alle curve di Bézier, i cui punti di controllo determinano variazioni su tutto l'elemento, esse consentono modifiche locali della curva, senza intaccare la generalità della stessa. Le NURBS, oltre ad avere intervalli differenti, sono anche razionali, cioè risultano essere rapporto di funzioni polinomiali. Questa generalizzazione delle curve *B-spline* consente quindi di ampliare la rappresentazione geometrica degli oggetti, e di costruire figure geometriche regolari – quali ad esempio una circonferenza o, nello spazio, una sfera – che nei casi precedenti veniva approssimata a seconda della quantità di punti di controllo a disposizione (figura 8.30). Con le NURBS, pertanto, avviene la fusione dei due registri della rappresentazione digitale, quello matematico e quello numerico. Una trattazione sistematica delle NURBS, e

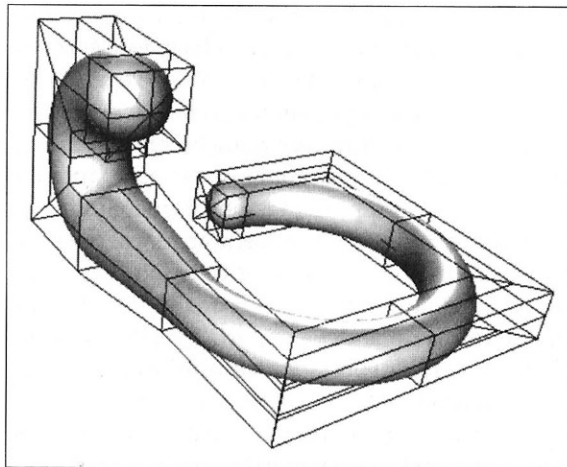


Fig. 8.30

di tutti gli algoritmi che ne hanno permesso la definizione è stata fatta da Les Piegl e Wayne Tiller³⁰ e da Gerald E. Farin³¹.

La seconda rilevante questione posta per il superamento dell'approccio numerico alla descrizione della forma è dato dalla esplicita richiesta proveniente dal settore meccanico che chiedeva di poter comporre in maniera semplificata e intuitiva solidi elementari così da poter costruire, per mutua aggregazione o dissociazione, volumi sempre più complessi. Si stavano cioè ponendo le basi della modellazione solida, vale a dire di quello specifico settore della costruzione di modelli digitali che vede nella logica matematica di George Boole³² il suo riferimento più diretto. Se molti sono stati i tentativi di affrontare tale argomento saranno gli studi di Aristides A.G. Requicha e Herbert B. Voelcker presso la University of Rochester a ottenere i risultati più interessanti. Basti consultare le molteplici memorie relative al *Production Automation Project* (PAP), attivato nel 1972, in cui i temi della addizione, sottrazione, intersezione dei solidi, connessi al-

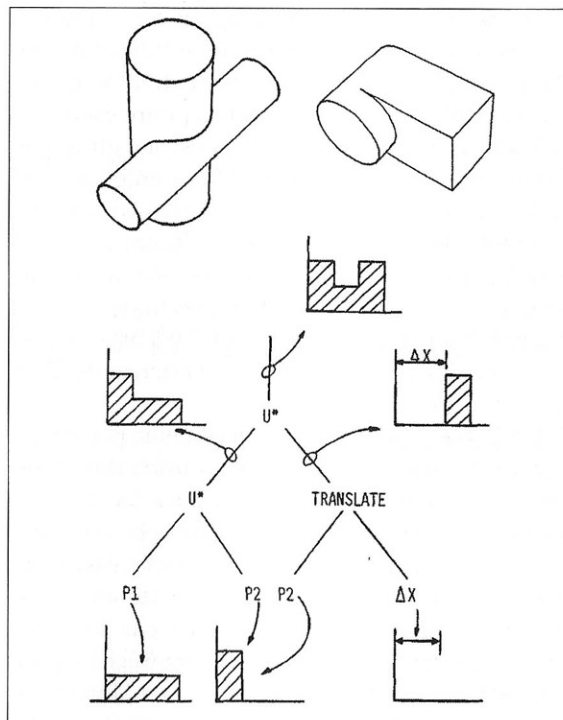


Fig. 8.31

le problematiche relative alla loro rappresentazione digitale, sono riccamente documentati³³. In quella sede si rese necessario sviluppare uno specifico linguaggio di descrizione delle forme e del loro possibile assemblaggio, il PADL³⁴, che condurrà alla teoria e tecnica della modellazione solida così come oggi è considerata. Nel passaggio dalla costruzione di superficie – sia essa numerica o matematica, cioè composta di patches, superfici di Bézier o NURBS – alla modellazione solida, la differenza sostanziale sta nel fatto che in quest'ultimo caso non vengono considerati tanto gli spigoli della geometria, ma il volume che essi stessi determinano (figura 8.31). Tra le domande che Requicha porrà introducendo

Fig. 8.30 Modello composto di superfici NURBS (Farin)

Fig. 8.31 Grafici e schema scompositivo relativi alla modellazione solida (Requicha)

³⁰ L. Piegl, W. Tiller, *The NURBS Book*, Springer, Berlino 1997.

³¹ G.E. Farin, *NURBS. From Projective Geometry to Practical Use*, AK Peters, Natick (Mass.) 1999. In particolare si veda il capitolo 9 alle pp. 153-67.

³² Tra le opere più importanti di G. Boole troviamo: *The Mathematical Analysis of Logic*, Macmillan, Cambridge 1847 e *An Investigation of the Laws of Thought, on Which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*, Dover, New York 1854.

³³ Di seguito si dà un elenco dei più significativi documenti della sperimentazione: A.A.G. Requicha, N.M. Samuel, H.B. Voelcker, *Part and Assembly Description Language II. Proposed Specifications for Definitional Facilities in PADL-1.n*, «Tech. Mem.», 20a, University of Rochester, Rochester 1974; A.A.G. Requicha, *Part and Assembly Description Language I. Dimensioning and Tolerancing*, «Tech. Mem.», 19, University of Rochester, Rochester 1977; A.A.G. Requicha, H.B. Voelcker, *Constructive Solid Geometry*, «Tech. Mem.», 25, University of Rochester, Rochester 1977; A.A.G. Requicha, R.B. Tilove, *Mathematical Foundations of Constructive Solid Geometry. General Topology of Regular Closed Sets*, «Tech. Mem.», 27, University of Rochester, Rochester 1978.

³⁴ PADL è l'acronimo di *Part and Assembly Description Language*, linguaggio di descrizione di un elemento e assemblaggio.

³⁵ A.A.G. Requicha, *Representations for Rigid Solids: Theory, Methods, and Systems*, "ACM Computing Surveys", 12, 4, 1980, p. 439.

³⁶ L'acronimo UCS sta per *User Coordinate System*.

³⁷ Coons, *Surfaces for Computer-Aided Design*, cit., p. 5.

l'argomento all'interno di un significativo articolo, relativo alla rappresentazione dei solidi, ve n'è anche una riguardante la costruzione di un poliedro, che potrebbe costituire la sintetica premessa di tutto il lavoro svolto a Rochester: «Possono gli spigoli fornire una informazione soddisfacente circa un poliedro solido per consentirci di calcolare (in maniera totalmente automatica) il volume, la sua apparenza e qualsiasi altra proprietà geometrica del poliedro?»³⁵. La risposta a tale questione, oltre ad essere in parte contenuta nel testo dell'articolo, deve essere rintracciata in tutta l'esperienza del PAP, che si concluderà nel 1987.

Il 12 agosto 1981 veniva ufficialmente presentato il primo personal computer della storia dell'informatica. Di lì a poco tutte le procedure che faticosamente la ricerca sulle nuove tecnologie della rappresentazione grafica aveva prodotto sarebbero state utilizzate da un vasto pubblico di tecnici, architetti, ingegneri, grafici e designers che alimentavano la domanda di macchine economiche e poco ingombranti e software *friendly* e ugualmente di basso costo. Si trattava, pertanto, di tradurre e ricompilare gli algoritmi che i ricercatori avevano in parte già definito utilizzando le grandi unità di calcolo finora disponibili e i linguaggi di programmazione orientati a utenti esperti.

Appena un anno dopo l'Autodesk presentava la prima versione di AutoCAD, programma bidimensionale di descrizione di una geometria, che sarà tra i primi CAD per personal computer della storia dell'informatica grafica. È interessante riflettere sul ciclo evolutivo di questo software, perché una simile progressione si manifesterà in quasi tutti i successivi prodotti di disegno digitale per elaboratore elettronico. Con la versione 2.1 di questo programma,

infatti, contenente il modulo *3D Level 1* e mostrata preliminarmente in occasione della manifestazione *Fall Comdex* del novembre 1984 a Las Vegas, verrà fornita all'utente la possibilità di estrarre perpendicolarmente le primitive grafiche elementari (linea, arco, polilinea, poligoni, cerchio ecc.), aprendo il mondo della rappresentazione digitale di massa alla visualizzazione 3D, sebbene ancora semplificata. L'introduzione degli algoritmi già citati di Coons, di quelli di costruzione di una *mesh* generica e di determinazione delle superfici rigate e di rotazione, avvenuta con la versione 10 di AutoCAD, presentata nel 1988 (che non a caso contemplerà anche il Sistema di Coordinate Utente o UCS³⁶, cioè uno spazio cartesiano variabile collocato all'interno dello spazio generale) dilateranno il campo di indagine che vedrà solo con la modellazione solida (versione 11, poi raffinata nella *release* 12) l'intervento tangibile della matematica per la realizzazione semplificata di forme geometriche.

Considerato il lento e difficile procedere della ricerca nel settore della modellazione digitale, sia essa poligonale o matematica, e i risultati che soltanto da pochi anni sono disponibili a tutti gli utenti, non possono che ritornare alla mente le parole con cui Steven Coons chiudeva l'introduzione contenuta nell'importante saggio citato all'inizio, e che dimostra come conoscenza tecnica e intuizione storica fossero due componenti ben presenti nella personalità dello studioso: «...nel giro di pochi anni – scriveva in quel lontano 1967 – sarà possibile non solo disegnare su di un piano di disegno virtualmente illimitato, ma disegnare oggetti direttamente nello spazio tridimensionale, e vedere questi oggetti costruiti come si vedrebbe un oggetto fisico»³⁷.

Riccardo Migliari

Geometria descrittiva

Volume I - Metodi e costruzioni

La geometria descrittiva è la scienza che studia le figure geometriche dello spazio servendosi dei loro modelli. A differenza della geometria analitica e della geometria differenziale, che usano linguaggi simbolici, la geometria descrittiva usa un linguaggio visivo e per questa ragione è lo strumento principe del progetto di ingegneria, di architettura o design. Fino a pochi anni fa, la geometria descrittiva operava esclusivamente attraverso il disegno su carta, in due dimensioni; oggi utilizza anche il computer, che offre la possibilità di disegnare nello spazio e una accuratezza della rappresentazione di gran lunga migliore.

Questo libro propone dunque l'antica scienza di Monge in una veste rinnovata: accanto ai metodi codificati dalla tradizione, vengono trattati i metodi attualmente impiegati nei programmi di modellazione digitale, vale a dire la rappresentazione matematica e la rappresentazione poligonale. I medesimi metodi sono poi applicati alle costruzioni e ai problemi tipici della geometria descrittiva. Il lettore viene guidato verso la soluzione da procedure che elencano, passo passo, le operazioni da compiere e, in molti casi, i comandi da utilizzare.

Riccardo Migliari, architetto, è professore ordinario di Fondamenti e Applicazioni di Geometria descrittiva alla «Sapienza» Università di Roma. Si interessa delle applicazioni del computer al progetto e alla rappresentazione dell'architettura dalla fine degli anni Sessanta e ha seguito l'evoluzione dei sistemi informatici fin dal loro primo apparire nel mondo accademico e professionale. È attualmente impegnato nel progetto di rinnovamento della disciplina di cui è titolare e ha dedicato a questo tema molte pubblicazioni, in parte consultabili sul sito <http://www.migliari.it>.

Il programma **ThinkDesign** può essere scaricato al seguente indirizzo:

www.migliari.it/download/td_2008.zip.

Docenti e studenti possono chiedere la licenza a

www.think3.com/it/contatti/contatti?frompg=educational o tramite il sito www.utetuniversita.it.

In copertina: *L'evoluzione della scuola romana, da Orseolo Fasolo ad oggi.*

€ 45,00

ISBN 978-88-251-7329-1



9 788825 173291