UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA ELETTRICA, GESTIONALE E MECCANICA

CORSO DI DOTTORATO DI RICERCA
IN INGEGNERIA INDUSTRIALE E DELL'INFORMAZIONE
CICLO XXVI

TESI DI DOTTORATO DI RICERCA

CARATTERIZZAZIONE ELETTROMECCANICA NUMERICO-SPERIMENTALE DI TRAVI PIEZOELETTRICHE OTTIMIZZATE PER IL RECUPERO DI ENERGIA DA VIBRAZIONI

DOTTORANDO
MARCO GALLINA

TUTOR
ING. DENIS BENASCIUTTI

ANNO ACCADEMICO
2013/2014

"Nel mezzo del cammin di nostra vita
mi ritrovai per una selva oscura,
ché la diritta via era smarrita…"

di Dante Alighieri

"Stay hungry. Stay foolish"

di Steve Jobs

Indice

INDICE ..... **V**

LISTA DELLE TABELLE ..... **VII**

LISTA DELLE FIGURE ..... **IX**

LISTA DEI SIMBOLI ..... **XIII**

INTRODUZIONE **1**

1 RECUPERO DI ENERGIA DA VIBRAZIONI CON TRAVE PIEZOELETTRICA **3**

1.1 ALIMENTAZIONE ELETTRICA ALTERNATIVA DI DISPOSITIVI ELETTRONICI RISPETTO ALLA RETE DI DISTRIBUZIONE O ALLE BATTERIE 3
1.2 CONVERSIONE DELL'ENERGIA CINETICA IN ENERGIA ELETTRICA 4
1.3 EFFETTO PIEZOELETTRICO 4
1.3.1 Cenni storici *4*
1.3.2 Piezoelettricità *5*
1.3.3 Piombo-zirconato-titanato (PZT) *6*
1.4 EQUAZIONI PIEZOELETTRICHE 7
1.5 TRAVE PIEZOELETTRICA BIMORFA 9
1.6 STRATEGIE DI OTTIMIZZAZIONE MECCANICA DELLA TRAVE 11
1.6.1 Ottimizzazione geometrica *11*
1.6.2 Ottimizzazione della deformata *12*

2 OTTIMIZZAZIONE DELLA GEOMETRIA: SIMULAZIONE NUMERICA **13**

2.1 DESCRIZIONE DELLE GEOMETRIE OTTIMIZZATE 13
2.2 MODELLO AD ELEMENTI FINITI 16
2.2.1 Costruzione del modello geometrico e definizione dei materiali *16*
2.2.2 Introduzione degli elementi e generazione della mesh *17*
2.2.3 Inserimento accoppiamenti elettrici, vincolamento e LMM *19*
2.3 SOLUZIONE DELL'ANALISI MODALE 20
2.4 SOLUZIONE DELL'ANALISI ARMONICA 21
2.5 CONFRONTO TRA LE CURVE DI CARATTERIZZAZIONE FEM AL VARIARE DELLA RESISTENZA APPLICATA 26
2.5.1 Andamento del voltaggio *26*
2.5.2 Andamento del modulo della funzione di trasferimento dello spostamento estremo-base *26*
2.5.3 Andamento della frequenza di risonanza *28*
2.5.4 Andamento della potenza *28*
2.5.5 Andamento della potenza specifica volumica *29*
2.5.6 Conclusioni *30*

3 OTTIMIZZAZIONE DELLA GEOMETRIA: PROVE SPERIMENTALI **31**

3.1 TIPOLOGIE DI TRAVI PIEZOELETTRICHE 31
3.2 SISTEMA SPERIMENTALE GLOBALE 32
3.2.1 Sistema di afferraggio delle travi *34*
3.2.2 Sistema di misura dello spostamento della base *35*

3.2.3 Sistema di misura dello spostamento dell'estremo libero *36*
3.2.4 Sistema di misura dell'accelerazione della base *36*
3.2.5 Sistema di generazione delle vibrazioni *37*
3.2.6 Sistema di controllo analogico in retroazione dell'accelerazione della base *38*
3.2.7 Sistema di acquisizione dati e controllo digitale *39*
3.2.8 Sistema di variazione automatica delle resistenze *40*
3.2.9 Sistema di visualizzazione in tempo reale dei segnali campionati e di controllo di sicurezza *42*
3.2.10 Sistema ausiliario di individuazione dei disturbi *44*
3.3 ELABORAZIONE NUMERICA DEI SEGNALI 46
3.4 CONFRONTO TRA LE CURVE DI CARATTERIZZAZIONE AL VARIARE DELLA RESISTENZA APPLICATA 50
3.4.1 Andamento del voltaggio *50*
3.4.2 Andamento del modulo della funzione di trasferimento spostamento estremo-base *50*
3.4.3 Andamento della frequenza di risonanza *52*
3.4.4 Andamento della potenza *52*
3.4.5 Andamento della potenza specifica volumica *53*
3.5 CONFRONTO DELLA POTENZA CON I RISULTATI IN LETTERATURA 55
3.6 CONFRONTO TRA LA POTENZA NUMERICA E SPERIMENTALE 55

4 OTTIMIZZAZIONE DELLA DEFORMATA 59

4.1 MODELLO ANALITICO 59
4.1.1 Deflessione ottimale per trave omogenea *59*
4.1.2 Deflessione ottimale per trave composita *61*
4.2 MODELLO AGLI ELEMENTI FINITI 67
4.3 PROVE SPERIMENTALI 72
4.4 CONCLUSIONI 75

5 TRAVE CON GEOMETRIA AD E: SIMULAZIONE NUMERICA 79

5.1 PROGETTO DELLA GEOMETRIA AD E 79
5.2 SIMULAZIONE NUMERICA 80
5.3 CONFRONTO DEI RISULTATI 84
5.4 CONCLUSIONI 86

CONCLUSIONI 87

APPENDICE A 89

APPENDICE B 91

APPENDICE C 93

BIBLIOGRAFIA 95

RINGRAZIAMENTI 99

Lista delle tabelle

Tab. 1.1 *Potenza ed energia ricavabile da alcune fonti energetiche* 3
Tab. 2.1 *Parametri delle simulazioni* 16
Tab. 2.2 *Frequenze di risonanza fondamentali delle travi* 21
Tab. 2.3 *Confronto tra i valori di potenza generata dalle travi* 30
Tab. 3.1 *Parametri generali di prova* 34
Tab. 3.2 *Caratteristiche tecniche eddyNCDT-3010-S1-M-C3* 35
Tab. 3.3 *Caratteristiche tecniche optoNCDT-LD-1605-2* 36
Tab. 3.4 *Caratteristiche tecniche catena accelerometrica PCB* 37
Tab. 3.5 *Caratteristiche tecniche dello shaker* 37
Tab. 3.6 *Caratteristiche tecniche del controllore analogico in retroazione* 38
Tab. 3.7 *Caratteristiche tecniche del sistema di acquisizione dati digitale* 39
Tab. 3.8 *Valori in [kΩ] delle resistenze utilizzate* 42
Tab. 3.9 *Caratteristiche del sistema ausiliario di individuazione dei disturbi* 44
Tab. 3.10 *Esempio di valori sperimentali per la trave trapezoidale diretta* 49
Tab. 3.11 *Confronto tra i valori sperimentali di potenza generata dalle travi* 54
Tab. 3.12 *Confronto tra i valori di potenza numerici e sperimentali* 55
Tab. 3.13 *Confronto tra i valori di smorzamento globale numerico e sperimentale* 56
Tab. 4.1 *Confronto tra risultati analitici e numerici, con le misure sperimentali* 71
Tab. 5.1 *Valori di* χ *e di* w_c 80
Tab. 5.2 *Valori delle frequenze dei primi tre modi propri* 82

Lista delle figure

Fig. 1.1 *Cristallo di quarzo* 5
Fig. 1.2 *Effetto piezoelettrico: a) diretto; b) inverso* 6
Fig. 1.3 *Effetto piezoelettrico diretto nel PZT: a) quiete; b) applicazione di una forza* 6
Fig. 1.4 *Modalità di utilizzo: a) modo 33; b) modo 31.* 10
Fig. 1.5 *Configurazioni: a) unimorfo; b) bimorfo.* 10
Fig. 1.6 *Collegamenti: a) serie; b) parallelo.* 10
Fig. 1.7 *Deformazioni all'interno di una trave rettangolare* 11
Fig. 1.8 *Trave a mensola con massa d'estremità* 11
Fig. 1.9 *Deformazioni all'interno di una trave trapezoidale* 12
Fig. 1.10 *Deformazione all'interno di una trave rettangolare* 12
Fig. 2.1 *Trave a mensola bimorfa rettangolare* 13
Fig. 2.2 *Travi: a) trapezoidale diretta; b) trapezoidale inversa* 14
Fig. 2.3 *Distribuzione della tensione massima di flessione lungo l'apertura della trave* 15
Fig. 2.4 *Prototipi di travi ottimizzate: (a) rettangolare; (b) trapezoidale diretta;(c) trapezoidale inversa. Quest'ultime sia a pari volume (alto) che a pari larghezza massima (basso).* 15
Fig. 2.5 *Collegamento in serie degli strati piezoelettrici* 15
Fig. 2.6 M*odello geometrico: a) trave con massa semplificata; b) massa reale* 17
Fig. 2.7 *Sistema di riferimento: a) ANSI/IEEE; b) ANSYS™* 17
Fig. 2.8 *Tipi di elementi utilizzati: a) SOLID5; b) CIRCU94; c) SOLID45; d) MASS21* 17
Fig. 2.9 *Modello agli elementi finiti della trave trapezoidale diretta* 18
Fig. 2.10 *Particolare della mesh nello spessore della trave* 19
Fig. 2.11 *Particolare della base della trave con creazione di superfici equipotenziali agli elettrodi ed al sostegno metallico. Imposizione di potenziale nullo alla superficie dell'elettrodo superiore ed inserimento della resistenza elettrica esterna tra i due elettrodi.* 19
Fig. 2.12 *Particolare del vincolamento della base della trave con applicazione delle* 20
Fig. 2.13 *Primo modo di vibrare della trave trapezoidale diretta* 21
Fig. 2.14 *Schema del processo di calcolo numerico per la trave trapezoidale diretta* 22
Fig. 2.15 *Andamento delle curve del modulo della funzione di trasferimento* 23
Fig. 2.16 *Andamento delle curve di voltaggio in funzione della frequenza per valori* 23
Fig. 2.17 *Esempio di curve di caratterizzazione FEM di voltaggio e frequenza* 24
Fig. 2.18 *Esempio di curve di caratterizzazione FEM del modulo della funzione* 25
Fig. 2.19 *Esempio di curve di caratterizzazione FEM di potenza* 25

Fig. 2.20 *Confronto tra le curve FEM di voltaggio delle travi* 27
Fig. 2.21 *Confronto tra le curve FEM dei moduli della FT estremo-base delle travi* 27
Fig. 2.22 *Confronto tra le curve FEM della frequenza di risonanza (<FT>) delle travi* 28
Fig. 2.23 *Confronto tra le curve FEM di potenza delle travi* 29
Fig. 2.24 *Confronto tra le curve FEM di potenza specifica volumica delle travi* 30
Fig. 3.1 *Travi piezoelettriche a diverse geometrie* 31
Fig. 3.2 *Schema grafico del sistema sperimentale d'insieme (vedi Fig. 3.3)* 32
Fig. 3.3 *Sistema sperimentale d'insieme* 33
Fig. 3.4 *Sistema di afferraggio della trave piezoelettrica* 34
Fig. 3.5 *Sistema di misura dello spostamento della base con correnti indotte* 35
Fig. 3.6 *Sistema di misura dello spostamento dell'estremità: a) laser; b) alimentatore* 36
Fig. 3.7 *Sistema di misura dell'accelerazione della base:* 37
Fig. 3.8 *Sistema di generazione delle vibrazioni: a) shaker; b) amplificatore* 38
Fig. 3.9 *Sistema di controllo analogico in retroazione* 39
Fig. 3.10 *Sistema di acquisizione dei dati e di controllo digitale* 40
Fig. 3.11 *Schema elettrico del sistema di* 41
Fig. 3.12 *Sistema di variazione automatica delle resistenze* 41
Fig. 3.13 *Schema a blocchi del controllore digitale* 42
Fig. 3.14 *Schema del controllore con il programma Labview™* 43
Fig. 3.15 *Interfaccia per la visualizzazione in tempo reale dei segnali acquisiti* 44
Fig. 3.16 *Sistema ausiliario di individuazione dei disturbi:* 45
Fig. 3.17 *Spettro in frequenza del modulo del disturbo (33Hz)* 45
Fig. 3.18 *Trasformata di Fourier del modulo del disturbo (33 Hz)* 46
Fig. 3.19 *Esempio dei segnali acquisiti per la trave trapezoidale diretta* 47
Fig. 3.20 *Esempio di modulo e fase della funzione di risposta in frequenza per la* .. 48
Fig. 3.21 *Confronto tra le curve sperimentali di voltaggio delle travi* 51
Fig. 3.22 *Confronto tra le curve sperimentali dei moduli della FT estremo-base delle travi* 51
Fig. 3.23 *Confronto tra le curve sperimentali della frequenza di risonanza delle travi* 52
Fig. 3.24 *Confronto tra le curve sperimentali di potenza delle travi* 53
Fig. 3.25 *Confronto tra le curve sperimentali di potenza specifica volumica delle travi* 54
Fig. 3.26 *Confronto tra le curve numeriche e sperimentali di potenza delle travi a pari volume totale* 56
Fig. 3.27 *Confronto tra le curve numeriche con taratura e sperimentale di potenza della trave Trapezoidale Diretta a pari volume totale al variare della resistenza elettrica applicata* 57
Fig. 4.1 *Configurazioni di deformata analizzate:* 60
Fig. 4.2 *Trave piezoelettrica bimorfa polarizzata in modo {31}* 62
Fig. 4.3 *Sequenza di prova: (a) configurazione non deformata; (b) trave bimorfe deformata a circuito aperto; (c) chiusura interruttore con flusso di corrente nella resistenza* 66
Fig. 4.4 *Modalità reali per ottenere un momento flettente costante: (a) configurazione teorica;* 67

Fig. 4.5 *Modello agli elementi finiti (con simmetria geometrica) della trave bimorfa in contatto con il basamento circolare. Distribuzione delle tensioni di flessione T_1 causate da una pressione uniforme* 69
Fig. 4.6 *Tensione sulla superficie della trave lungo la direzione trasversale per il caso:* 69
Fig. 4.7 *Curve numeriche di scarica del voltaggio per la configurazione ML con pressione* 70
Fig. 4.8 *Prototipi per le configurazioni: (a) RC e (b) ML* 73
Fig. 4.9 *(a) Curve sperimentali del voltaggio per singola flessione; (b) curve di scarica dopo molteplici flessioni ripetute per la configurazione ML soggetta a pressione uniforme (una leggera traslazione nel tempo tra le curve è stata intenzionalmente introdotta per migliorarne la leggibilità).* 73
Fig. 5.1 *Trave a mensola: a) rettangolare; b) con geometria ad E* 79
Fig. 5.2 *Quote dimensionali della trave con geometria ad E con χ=0,43* 81
Fig. 5.3 *Modello FEM della trave con geometria ad E con χ=0,43* 81
Fig. 5.4 *Modi propri di vibrare della trave ad E con χ=0,43:* 82
Fig. 5.5 *Andamento della curva di voltaggio in funzione della frequenza per valori* 83
Fig. 5.6 *Andamento delle curve di voltaggio in funzione della frequenza (del secondo modo) per valori di resistenza crescente calcolato al FEM per la trave ad E con χ=0,43 (a=280 mm/s^2)* 83
Fig. 5.7 *Confronto tra le curve della frequenza di risonanza delle travi con geometria ad E* 85
Fig. 5.8 *Confronto tra le curve della potenza delle travi con geometria ad E* 85
Fig. A.1 *Geometrie delle travi piezoelettriche* 89
Fig. B.1 *Geometria della massa d'estremità* 91
Fig. B.2 *Geometria dell'incastro dell'afferraggio* 91
Fig. B.3 *Geometria della base dell'afferraggio* 92
Fig. C.1 *Matrice di flessibilità* 93
Fig. C.2 *Matrice di accoppiamento* 93
Fig. C.3 *Matrice delle costanti dielettriche* 93
Fig. C.4 *Proprietà meccaniche del sostegno metallico* 93

Lista dei simboli

|FT|: modulo della funzione di trasferimento; 24
<FT>: fase funzione di trasferimento; 48
a: accelerazione; 20
A: sezione trasversale; 5
d: costante piezoelettrica; 5
D: spostamento elettrico; 5
E: campo elettrico; 5
F: forza; 5
f_r: frequenza di risonanza; 22
I: momento d'inerzia; 60
L: lunghezza; 5
l_b: lunghezza trave; 14
m_e: massa d'estremità; 55
m_i: massa fittizia LMM; 20
P: potenza; 24
P_S: potenza specifica volumica; 24
R: resistenza; 21
s: deformazione; 5
t: tempo; 46
t_p: spessore piezoelettrico; 11
u: potenziale elettrico o voltaggio; 6
w: larghezza trave; 14
w_c: larghezza parte centrale trave ad E; 80
x: posizione; 14
Y: modulo di Young; 5
ε: costante di permittività dielettrica; 6
ζ_b: smorzamento globale della trave; 16
v: spostamento estremità; 22
σ: tensione; 5
χ: rapporto di larghezza; 80
ψ: coefficiente di utilizzo della deformazione; 61

Introduzione

Il progressivo sviluppo tecnologico ha portato alla generazione di dispositivi elettronici ad elevate prestazioni sempre più complessi e miniaturizzati. Nel prossimo futuro verranno incrementati gli sforzi per la creazione di dispositivi fissi o mobili ad alimentazione autonoma, come ad esempio quelli indossabili dall'essere umano. Allo stato attuale, questo genera delle problematiche a livello di alimentazione elettrica di tali apparecchiature, in quanto non risulta sempre agevole l'utilizzo della rete di distribuzione dell'energia o delle batterie. Ultimamente si è notevolmente sviluppata una tematica di ricerca che cerca di progettare dispositivi per recuperare energia dall'ambiente che normalmente non viene utilizzata. Dalle varie fonti energetiche disponibili, ci si è soffermati sullo sfruttamento dell'energia cinetica sotto forma di vibrazioni. La sua conversione in energia elettrica viene realizzata sfruttando l'effetto piezoelettrico. Questa proprietà è manifestata da alcuni cristalli, naturali od artificiali, quando si caricano elettricamente se sottoposti a deformazione meccanica. In questo lavoro si fa riferimento a delle travi a mensola bimorfe composte da vari strati di materiale piezoelettrico. Lo scopo della ricerca riguarda lo studio di strategie per l'incremento delle potenza elettrica generata dalla trave, andando a modificarne il comportamento meccanico rispetto alla sua configurazione rettangolare. Per mezzo di simulazioni agli elementi finiti e successive prove sperimentali, si è studiata la possibilità ottimizzare le travi sia modificando la geometria costruttiva che la deformata strutturale. Per quanto concerne le simulazioni numeriche, si è costruito un modello elettromeccanico accoppiato dal quale sono state eseguite le analisi modale ed armonica. Nelle prove sperimentali, invece, sono state misurate le grandezze di interesse per la caratterizzazione elettromeccanica. I risultati ottenuti sono stati successivamente confrontati tra loro e con i dati presenti in letteratura. Infine è stata simulata numericamente una ulteriore variante di trave avente geometria ad E.

Questa tesi è organizzata in cinque capitoli. Il primo capitolo introduce l'obbiettivo del lavoro svolto, descrivendo l'effetto piezoelettrico come principio di trasformazione dell'energia cinetica in energia elettrica. Vengono anche richiamate le equazioni costitutive per materiali piezoelettrici. Infine sono proposte due diverse strategie di ottimizzazione meccanica, di geometria e deformata, sulle prestazioni elettriche di travi bimorfe.
Il secondo capitolo tratta la simulazione numerica dell'ottimizzazione della geometria della trave, variandone la forma in trapezoidale rispetto al caso rettangolare semplice. Attraverso un modello ad elementi finiti, si è eseguita un'analisi sia modale che armonica collegando la trave ad un circuito elettrico puramente resistivo. Questo ha permesso di calcolare varie grandezze d'interesse (voltaggio, potenza,…) per la caratterizzazione elettromeccanica delle travi.
Il terzo capitolo propone i risultati ottenuti da una serie di prove sperimentali sulle stesse travi descritte nel capitolo precedente. Allo scopo, si è progettato un opportuno

sistema di misura, composto da varie strumentazioni, per acquisire le grandezze d'interesse. Dopo questo processo, è stato necessario elaborare numericamente i dati per ottenere i risultati proposti. Infine è stato eseguito un confronto tra i modelli numerici, le prove sperimentali ed i dati presenti in letteratura.
Il quarto capitolo tratta l'ottimizzazione della deformata della trave, presentando i risultati ottenuti sia con le simulazioni numeriche che con le prove sperimentali. La metodologia di lavoro usata ricalca quanto già descritto nei due capitoli precedenti.
Il quinto capitolo propone invece i risultati della simulazione numerica di una ulteriore variante di trave avente geometria ad E.
In appendice infine, si allegano i disegni costruttivi delle travi e dell'afferraggio, le matrici descrittive del materiale piezoelettrico ed i listati dei programmi utilizzati per l'analisi numerica ed elaborazione dei dati sperimentali.

1 Recupero di energia da vibrazioni con trave piezoelettrica

In questo capitolo verrà inizialmente introdotto il concetto di recupero di energia da vibrazioni presenti nell'ambiente con l'ausilio di dispositivi piezoelettrici costituiti da travi a mensola bimorfe. Sono poi presentati degli accenni di carattere storico e di fabbricazione caratterizzanti un materiale piezoelettrico. Si richiamano inoltre le equazioni costitutive per i materiali piezoelettrici. Infine viene descritta una metodologia di ottimizzazione delle prestazioni elettriche di una trave rettangolare variando sia la geometria costruttiva che variando la deformata strutturale.

1.1 Alimentazione elettrica alternativa di dispositivi elettronici rispetto alla rete di distribuzione o alle batterie

Mentre le batterie continuano a fornire l'energia elettrica necessaria per l'alimentazione di vari dispositivi tecnologici che non possono essere connessi direttamente alla rete di distribuzione dell'energia elettrica, numerose ricerche vengono realizzate per rendere competitive le sorgenti di energia già disponibili nell'ambiente. La capacità di recuperare energia raggruppa tutte quelle tecniche e i processi che rendono possibile il prelievo, la trasformazione e l'accumulo di energia ricavate da diverse fonti disponibili nell'ambiente. Risulta così possibile alimentare un dispositivo elettronico, senza necessità di essere allacciato alla rete elettrica o di utilizzare delle batterie. L'allacciamento alla rete di distribuzione impone l'ubicazione fissa del dispositivo in un determinato luogo, mentre le batterie hanno durata relativamente breve. Esse quindi necessitano di una continua sostituzione nel tempo costituendo così un problema ambientale, economico e logistico. Negli ultimi tempi, queste tecniche di recupero di energia hanno trovato molto impiego nelle reti di sensori senza fili costituite da dispositivi autonomi anche mobili. Per questo motivo si cercano di sfruttare le fonti di energia sempre disponibili nell'ambiente, di cui le principali sono: fotovoltaica, termica, eolica, marina, cinetica, da radiofrequenza, dal corpo umano, ecc. Si propongono nella (Tab. 1.1) alcuni valori di riferimento delle potenze elettriche [1].

Tab. 1.1 *Potenza ed energia ricavabile da alcune fonti energetiche*

Sorgente	Potenza [$\mu W/cm^3$]	Energia [J/cm^3]
Batteria	N/A	2880
Solare	15000	N/A
Vibrazioni	375	N/A

A tale scopo, sono disponibili diversi metodi per recuperare energia dall'ambiente e per convertirla in energia elettrica disponibile. Nella presente tesi si farà riferimento alla conversione dell'energia cinetica in elettrica.

1.2 Conversione dell'energia cinetica in energia elettrica

Tra i vari modi possibili di conversione dell'energia cinetica in elettrica, si vuole sfruttare un sistema di recupero di energia dalle vibrazioni. Esso è generalmente costituito dai seguenti componenti fondamentali: un dispositivo che raccoglie l'energia cinetica disponibile dall'ambiente e la converte immediatamente in energia elettrica; un accumulatore per l'energia elettrica generata; un apparato elettronico di gestione in grado di ottimizzare il funzionamento dell'intero sistema e infine un utilizzatore che dissipi l'energia accumulata per il suo funzionamento. Le potenze elettriche disponibili sono però molto basse (mW). Sebbene purtroppo tale potenza non sia significativa se confrontata con le potenze erogate dalle grandi centrali, ha l'interesse di venire generata gratuitamente e direttamente in loco, quindi subito utilizzabile. Le vibrazioni di tipo meccanico, il movimento del corpo umano o addirittura il rumore acustico sono tutte forme di energia cinetica convertibili in energia elettrica. Vibrazioni caratterizzate da un livello energetico tale da rendere interessante una loro conversione in elettricità si trovano in numerose applicazioni, con frequenze comprese prevalentemente nell'intervallo 0-100 Hz [2]. Per convertire l'energia cinetica in elettrica, si si distinguono fondamentalmente tre principi di conversione: elettromagnetico, elettrostatico e piezoelettrico [3]. Nella presente tesi, si farà riferimento ai convertitori di tipo piezoelettrico [4], con configurazione di trave a mensola.

1.3 Effetto piezoelettrico

La piezoelettricità è una proprietà di alcuni materiali, i quali sono in grado di generare una carica elettrica, misurabile come differenza di potenziale sulla loro superficie, in modo proporzionale ad una deformazione meccanica imposta. Oppure, tale deformazione meccanica viene ad instaurarsi quando il materiale si trova soggetto ad un campo elettrico esterno [5], [6].

1.3.1 Cenni storici

Sin dall'antica Grecia del VI secolo A.C. si ha conoscenza di una misteriosa forza attrattiva che si veniva a sviluppare dallo strofinamento dell'ambra nei confronti della paglia [7]. I primi riferimenti in Europa appaiono qualche millennio dopo, nel 1707 a cura di J. G. Schmidt [8], che grazie all'importazione della tormalina dal Ceylon per mezzo di mercanti olandesi si accorse della sua proprietà di attrarre la cenere quando ancora calda. Tale proprietà di origine elettrica fu dimostrata nel 1756 da U. T. Æpinus [9], che notò la presenza di due zone distinte alle estremità del cristallo, una a carica positiva e l'altra a carica negativa, quando sottoposto a riscaldamento. Fu nel 1824 che D. Brewster [10], studiando tale fenomeno, introdusse per la prima volta il termine piroelettricità.
La piezoelettricità fu per la prima volta menzionata da R. J. Haüy nel 1817, seguito da A. C. Becquerel che conducendo alcuni esperimenti, notarono che alcuni cristalli

quando compressi in particolari direzioni accumulavano delle cariche positive e negative in certe porzioni della loro superficie. La dimostrazione di tale effetto, osservato in alcuni materiali cristallini quali ad esempio il quarzo (Fig. 1.1), la tormalina ed i sali di Rochelle, fu proposta per la prima volta nel 1881 da Pierre e Jacques Curie [11] [12].

Fig. 1.1 *Cristallo di quarzo*

La teoria della piezoelettricità si sviluppò ulteriormente agli inizi del XX secolo con il contributo di G. Lippmann per l'effetto piezoelettrico inverso, W.G. Hankel, W. Thomson. Nel 1910 W. Voigt pubblicò un trattato riguardante la struttura cristallina in cui vengono descritte le 20 classi di materiali piezoelettrici con la specificazione delle costanti caratteristiche ottenute dall'analisi tensoriale. Durante la prima guerra mondiale apparve la prima applicazione industriale di questi materiali, con l'ideazione del sonar da parte di P. Langevin nel 1917. In seguito, fu W.G. Cady che propose l'utilizzo del quarzo per controllare la frequenza di risonanza degli oscillatori e negli anni successivi le applicazioni industriali iniziarono a decollare (microfoni, accelerometri). Durante la seconda guerra mondiale, l'introduzione di materiali piezoceramici ha contribuito al notevole sviluppo odierno, sia nel loro utilizzo come attuatori che come sensori per il controllo del rumore e delle vibrazioni, estensivamente dimostrato da Forward nel 1981 e Crawley & de Luis nel 1987.

1.3.2 Piezoelettricità

In determinate classi di cristalli, viene a manifestarsi una polarizzazione elettrica quando in essi sono presenti delle sollecitazioni meccaniche. Tale effetto è definito come effetto piezoelettrico diretto. Viceversa, gli stessi generano una deformazione che può avere componente dominante lungo la direzione del campo elettrico applicato oppure nel piano a questo ortogonale e alla quale corrisponde una variazione del volume. In questo caso invece si parla di effetto piezoelettrico inverso. Entrambi i comportamenti sono impiegati sia per convertire energia meccanica in energia elettrica (sensori), oppure viceversa (attuatori).
Si consideri un cilindro di materiale piezoelettrico di lunghezza L [m] e sezione trasversale A [m^2], interposto tra due elettrodi messi in cortocircuito (Fig. 1.2a). Si definiscono: con Y [N/m^2] il modulo di Young, con d [C/N] la costante piezoelettrica, con D [C/m^2] lo spostamento elettrico, con s [m/m] la deformazione, con σ [N/m^2] la tensione meccanica e con E [C/m] il campo elettrico. Applicando una forza F [N], per effetto piezoelettrico diretto, si ha:

$$\begin{cases} s = \dfrac{\sigma}{Y} \\ D = d\sigma \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad \sigma = \frac{F}{A}; \quad s = \frac{\Delta L}{L}; \quad E = 0 \tag{1.1}$$

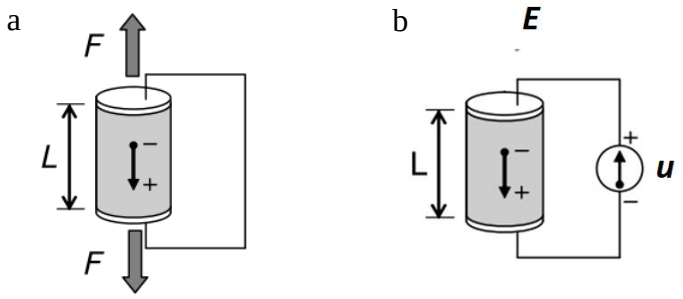

Fig. 1.2 *Effetto piezoelettrico: a) diretto; b) inverso*

Si consideri che allo stesso cilindro di materiale piezoelettrico, non in cortocircuito, venga applicato un campo elettrico esterno (Fig. 1.2b). Definendo con ε [C^2/Nm] la costante di permittività dielettrica e con u [V] il potenziale elettrico tra i due elettrodi, per effetto piezoelettrico inverso si ha:

$$\begin{cases} s = dE \\ D = \varepsilon E \end{cases} \qquad \text{dove} \qquad E = \frac{u}{L} \tag{1.2}$$

Le proprietà piezoelettriche possono essere intrinseche ad alcuni materiali naturali come il quarzo e la tormalina. D'altra parte, si possono generare cristalli artificiali come il sale di Rochelle ($KNaC_4H_4O_6{\cdot}4H_2O$) oppure dei materiali piezoceramici sottoposti ad un processo di polarizzazione per mezzo di un campo elettrico esterno. Alcuni esempi sono il titanato di bario ($BaTiO_3$) od il piombo-zirconato-titanato ($Pb(Zr_x,Ti_{1-x})O_3$) con acronimo PZT. Inoltre si hanno anche dei materiali piezopolimerici, come ad esempio il polivinilidenfluoruro ($-(C_2H_2F_2)_n-$) con acronimo PVDF. Nella presente tesi, si farà riferimento al PZT.

1.3.3 Piombo-zirconato-titanato (PZT)

Il PZT è un materiale piezoceramico ferroelettrico che dal punto di vista microscopico presenta un reticolo cristallino di tipo cubico a facce centrate, secondo una struttura Perovskitica ($A^{+2}B^{+4}O_3^{-2}$).

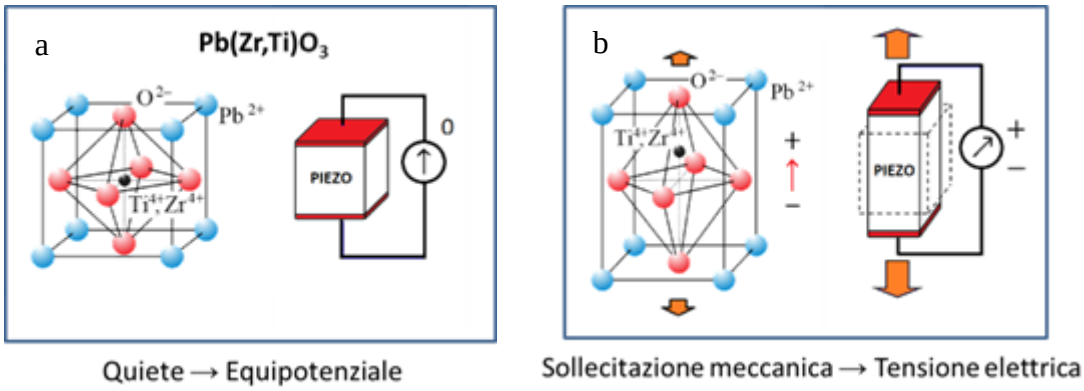

Fig. 1.3 *Effetto piezoelettrico diretto nel PZT: a) quiete; b) applicazione di una forza*

Nei vertici sono disposti i cationi metallici a grande raggio ionico (Pb^{+2}), al centro delle facce gli atomi di ossigeno (O^{-2}) e nel baricentro un catione metallico a piccolo raggio ionico confinato (Ti^{+4}, Zr^{+4}). Si tratta di una struttura metastabile. Sotto l'azione di una sollecitazione meccanica o l'azione di un campo elettrico esterno, l'atomo centrale baricentrico si sposta causando uno squilibrio nelle cariche dando così origine ad un dipolo elettrico, come raffigurato in (Fig. 1.3) per l'effetto diretto. Il rapporto tra titanio/zirconio e la possibilità di introdurre droganti permettono una grande flessibilità in termini di composizione e quindi di caratteristiche funzionali.
Per ottenere il materiale PZT, è necessario compiere una serie di processi, quali:

- miscelazione delle polveri di base;
- calcinazione (fino al 75% della temperatura di sinterizzazione);
- macinazione della polvere;
- spruzzatura e miscelazione con un legante;
- formatura e pressatura;
- prima combustione a 750 °C per eliminare il legante;
- sinterizzazione ad elevate temperature (1250-1350 °C);
- taglio, lucidatura, lappatura;
- applicazione degli elettrodi (sputtering);
- polarizzazione (campi elettrici di alcuni MV/m a 100-150 °C).

Per questo tipo di ceramica ferroelettrica, risulta quindi molto importante il processo di polarizzazione. Infatti, subito dopo il processo di sinterizzazione, i domini di un corpo in ceramica (le aree formate da cellule elementari di direzione dipolare uniforme) mostrano un orientamento arbitrario distribuito, ovvero il corpo macroscopico è isotropo e non presenta alcuna proprietà piezoelettrica. Durante il processo di polarizzazione, il corpo in ceramica è esposto a un forte campo elettrico in corrente continua, che determina l'allineamento dei dipoli elettrici in direzione del campo. Essi poi tendono a mantenere questo orientamento anche quando il campo applicato è rimosso (polarizzazione residua).
La microstruttura e di conseguenza le caratteristiche della ceramica, dipendono direttamente da tutte le fasi del processo e, in particolare, dalle caratteristiche della polvere. Lo studio quindi delle caratteristiche elastiche, piezoelettriche e dielettriche consiste nella determinazione dei valori di numerose costanti proprie del materiale.

1.4 Equazioni piezoelettriche

Il PZT presenta un comportamento anisotropo, quindi si ha la necessità di definire un sistema di riferimento (IEEE Standards), perciò tutte le costanti fisiche sono quantità di tipo tensoriale. In prima approssimazione si possono considerare solo alcune direzioni fondamentali tra loro ortogonali; per convenzione si assume che la direzione della polarizzazione coincida sempre con l'asse 3 di un sistema ortogonale di assi cartesiani. Le costanti del materiale che caratterizzano le proprietà di relazione fra campi elettrici e sollecitazioni meccaniche si esprimono di conseguenza con due indici. Indicando con **T** il tensore delle tensioni meccaniche ed **S** il tensore di deformazione, grazie alle simmetrie, è possibile raccogliere le quantità sopra descritte in opportuni vettori:

$$\mathbf{T} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{S} = \begin{Bmatrix} \delta_{11} \\ \delta_{22} \\ \delta_{33} \\ 2\gamma_{23} \\ 2\gamma_{31} \\ 2\gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} \tag{1.3}$$

Essendo i materiali piezoelettrici trasversalmente isotropi, poiché mostrano un comportamento elettromeccanico diverso se sollecitati nella direzione di polarizzazione oppure in direzione trasversale, la matrice di flessibilità ha la forma:

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(s_{11} - s_{12}) \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

Esistendo nel materiale un accoppiamento elettromeccanico, il comportamento meccanico è influenzato da parametri elettrici, e viceversa. A questo scopo si utilizzano apici per specificare grandezze costanti: T (oppure S) per indicare una tensione meccanica (o deformazione), E per indicare il campo elettrico.
In notazione matriciale, le equazioni costitutive sono (1.5):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}^E & \mathbf{d}^t \\ \mathbf{d} & \boldsymbol{\varepsilon}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

in cui **T** ed **S** sono i vettori (6x1) di tensione e deformazione, mentre **E** e **D** sono rispettivamente i vettori (3x1) campo elettrico e spostamento elettrico (1.6).

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

Inoltre, $\mathbf{s}^E$ (6x6) indica la matrice di flessibilità del materiale a campo elettrico costante (corto circuito). La $\boldsymbol{\varepsilon}^T$ (3x3) indica la matrice di permittività a tensione meccanica costante. Tale costante dielettrica (assoluta) è definita come lo spostamento elettrico per unità di campo elettrico. Infine la **d** (3x6) è la matrice di accoppiamento piezoelettrico (1.7) e $\mathbf{d}^t$ la sua trasposta. Essa esprime la polarizzazione elettrica generata in un materiale per unità di tensione meccanica applicata (effetto diretto); viceversa, può indicare anche la deformazione meccanica esibita dal materiale per unità di campo elettrico applicato (effetto inverso).

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

Per l'elemento d_{ij} del tensore **d** il primo indice "i" fornisce la direzione dell'azione "elettrica" (campo elettrico o spostamento elettrico), mentre il secondo indice "j" individua la componente di deformazione o tensione meccanica. Ad esempio, l'elemento d_{31} fornisce il rapporto fra spostamento elettrico D_3 in direzione "3" conseguente ad una tensione meccanica T_1 applicata in direzione "1".
Assumendo che 3 sia la direzione di polarizzazione, l'isotropia planare è espressa dalle uguaglianze $d_{31}=d_{32}$, ovvero un campo elettrico applicato nella direzione di polarizzazione 3 produce una deformazione meccanica uguale sia in direzione 1 che 2. Inoltre $d_{24}=d_{15}$, ovvero un campo elettrico parallelo all'asse 2 interagisce in eguale misura. L'equazione (1.5) si può così scrivere in forma estesa come in (1.8).

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^{E} & s_{12}^{E} & s_{13}^{E} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12}^{E} & s_{11}^{E} & s_{13}^{E} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13}^{E} & s_{13}^{E} & s_{33}^{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44}^{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44}^{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(s_{11}^{E} - s_{12}^{E}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & d_{15} & 0 \\ d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^{T} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22}^{T} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^{T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \tag{1.8}$$

Per confrontare dal punto di vista piezoelettrico, materiali con valori molto diversi di permittività e flessibilità, si definisce il fattore di accoppiamento elettromagnetico efficace k. Esso rappresenta, dato un campo elettrico applicato, la frazione di energia elettrica convertita in energia meccanica (o viceversa), fornendo una misura globale dell'entità dell'effetto piezoelettrico. Poiché non è possibile avere la conversione completa dell'energia, il fattore di accoppiamento elettromeccanico è sempre minore dell'unità $k < 1$ (valori tipici possono essere $k_{33}=0{,}75$ e $k_{31}=0{,}4$).

1.5 Trave piezoelettrica bimorfa

Un elemento di materiale piezoelettrico polarizzato presenta due diverse modalità preferenziali di utilizzo (Fig. 1.4). Tali modalità di applicazione di una deformazione per produrre una differenza di potenziale, vengono denominate rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano: 33 e 31.

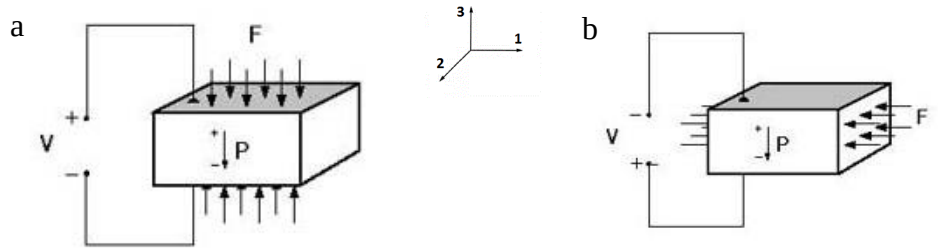

Fig. 1.4 *Modalità di utilizzo: a) modo 33; b) modo 31.*

Considerando l'elemento di materiale piezoelettrico polarizzato in direzione 3, la deformazione può essere indotta nella stessa direzione 33, oppure in direzione perpendicolare 31. In generale, il coefficiente di accoppiamento piezoelettrico d_{33} risulta essere maggiore del d_{31}, mentre il modulo di Young Y_3 è minore del Y_1. È possibile impilare tra loro vari strati piezoelettrici secondo due schemi base: unimorfo e bimorfo (Fig. 1.5). Il tipo unimorfo è costituito da una lamina piezoelettrica e da uno strato di materiale metallico. Il bimorfo invece presenta uno strato centrale di materiale metallico sulle cui superfici superiore e inferiore vengono incollati due strati di materiale piezoelettrico.

Fig. 1.5 *Configurazioni: a) unimorfo; b) bimorfo.*

Nel caso del bimorfo si possono ulteriormente distinguere due metodi di accoppiamento tra gli strati piezoelettrici: serie e parallelo (Fig. 1.6). Nel collegamento in serie, semplice dal punto di vista realizzativo, si avrà un voltaggio più elevato ma con minore capacità equivalente rispetto al collegamento in parallelo.

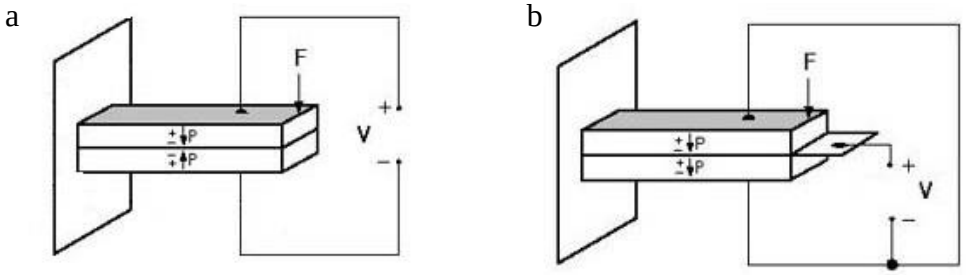

Fig. 1.6 *Collegamenti: a) serie; b) parallelo.*

Nella presente tesi si farà riferimento ad una trave a mensola bimorfa soggetta a flessione, con collegamento in serie tra gli strati piezoelettrici e polarizzazione in modo 31. Il suo principio di funzionamento si basa sull'indurre uno stato di deformazione all'interno della trave, la cui distribuzione in una generica sezione è denominata "a farfalla".
Essa risulta positiva sul lato delle fibre tese e negativa sul lato delle fibre compresse, variando linearmente tra questi estremi ed annullandosi sull'asse neutro (Fig. 1.7).

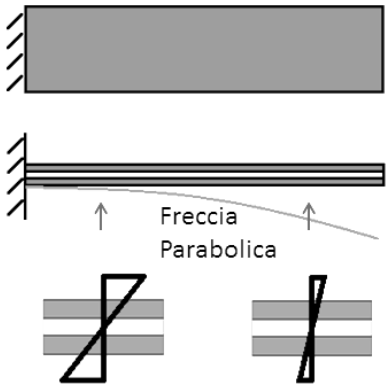

Fig. 1.7 *Deformazioni all'interno di una trave rettangolare sottoposta a flessione semplice*

Inoltre, per tarare la frequenza di risonanza della trave a mensola rispetto alla sorgente di vibrazione disponibile e per massimizzare la deformazione al suo interno, alla sua estremità può essere applicata una massa aggiuntiva (Fig. 1.8).

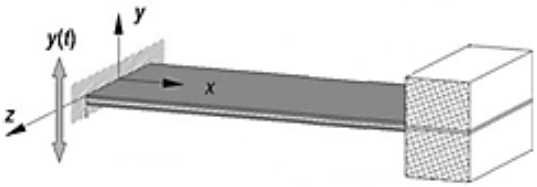

Fig. 1.8 *Trave a mensola con massa d'estremità*

1.6 Strategie di ottimizzazione meccanica della trave

Rispetto alla configurazione generale di trave a sbalzo rettangolare è stata proposta una strategia di ottimizzazione meccanica in modo tale da incrementare il valore medio della deformazione meccanica e quindi le prestazioni di potenza elettrica generata. A questo scopo sono state seguite due strade concettualmente differenti: la prima basata sulla variazione della geometria della trave e la seconda basata su una variazione forzata della curvatura della trave.

1.6.1 Ottimizzazione geometrica

Dal punto di vista della geometria della trave, al posto della rettangolare, si fa riferimento ad una forma di tipo trapezoidale sia diretta che inversa. Questa variazione comporta una distribuzione più uniforme delle deformazioni all'interno di ciascuna delle sezioni trasversali (Fig. 1.9). Considerando semplicemente la trave composta da materiale omogeneo, la tensione massima all'interno di una generica sezione a distanza x dall'incastro segue la formula (1.9). Dato che lo spessore t è costante, la variazione della larghezza della trave $w(x)$ deve seguire la variazione del momento $M(x)$ per mantenere costante la tensione massima σ_{max} (e quindi la deformazione massima). Questo spiega il motivo della rastremazione della trave. Una forma di tipo triangolare fornisce quindi un andamento costante della tensione

massima. La geometria trapezia è spesso adottata per l'esigenza di fissare una massa d'estremità.. Nel Capitolo 1 verrà affrontata in dettaglio questa procedura.

$$\sigma_{\max}(x) = \frac{M(x)}{\frac{w(x)\cdot t^2}{6}} \tag{1.9}$$

Se invece la variazione del momento flettente fosse di tipo quadratico, come nel caso di carico uniformemente distribuito, anche la forma della pianta dovrebbe variare in larghezza con legge dello stesso ordine.

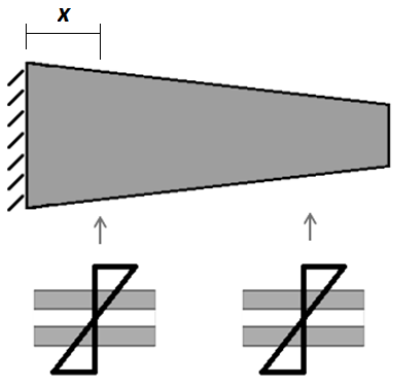

Fig. 1.9 *Deformazioni all'interno di una trave trapezoidale sottoposta a flessione semplice*

1.6.2 Ottimizzazione della deformata

Modificando forzatamente la deformata della trave rettangolare da una freccia parabolica ad una circolare è possibile ottenere una distribuzione più uniforme delle deformazioni di flessione all'interno di ciascuna delle sezioni trasversali (Fig. 1.10). In questo caso si vuole ricreare la curvatura che si ottiene imponendo un momento flettente costante all'estremità della trave stessa. Questo può essere ottenuto mediante l'imposizione di due dime a superficie cilindrica entro le quali viene fatta deflettere la trave rettangolare, come verrà descritto nel capitolo 1.

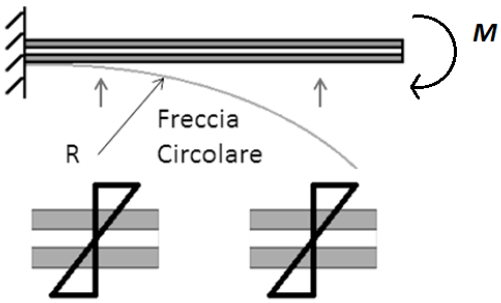

Fig. 1.10 *Deformazione all'interno di una trave rettangolare sottoposta a flessione forzata*

2 Ottimizzazione della geometria: simulazione numerica

In questo capitolo si esamina la possibilità di incrementare la potenza elettrica prodotta da travi piezoelettriche, per mezzo dell'ottimizzazione della loro geometria. A questo scopo viene trattata l'analisi numerica ad elementi finiti di cinque differenti travi a mensola piezoelettriche bimorfe sottoposte ad una forza con variazione sinusoidale nel tempo, aventi diversa geometria, con lo scopo di predirne le caratteristiche elettromeccaniche. L'approccio numerico consente di poter valutare oltre che lo stato tensionale e di deformazione della trave bimorfa anche la distribuzione della differenza di potenziale tra gli elettrodi (nel seguito descritta semplicemente come voltaggio), che di conseguenza permettere il calcolo della potenza elettrica generata [13]. Come punto di partenza si fa riferimento ad uno studio analitico precedente riguardante la progettazione delle geometrie ottimizzate [14], [15], [16]. Analogamente alla progettazione delle molle, il criterio analizzato è quello di massimizzare l'energia potenziale elastica accumulata in flessione dal dispositivo, ricercando strutture simili a solidi ad uniforme resistenza.

2.1 Descrizione delle geometrie ottimizzate

La ricerca della massimizzazione della deformazione meccanica all'interno del materiale piezoelettrico lungo l'intera lunghezza della trave bimorfa risulta l'obbiettivo di questo studio. Inizialmente è stato seguito il concetto di modificare la forma in pianta della trave rispetto alla conformazione classica rettangolare, la quale viene presa come riferimento (Fig. 2.1).

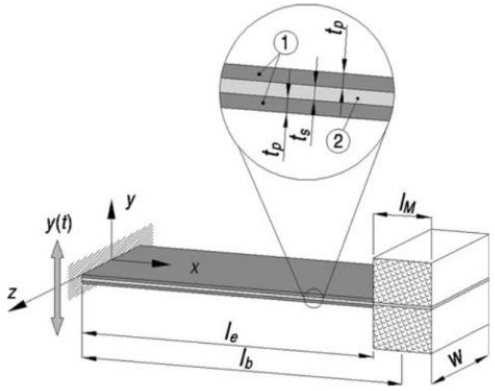

Fig. 2.1 *Trave a mensola bimorfa rettangolare*

In una trave a mensola rettangolare, il momento flettente e la risultante tensione massima lungo la direzione della linea d'asse decrescono linearmente dall'incastro fino all'estremità. La teoria [17] suggerisce che, per ottenere un momento flettente costante lungo l'intera lunghezza, e quindi la generazione di una deformazione prossima ai limiti di resistenza in ogni punto della superficie esterna della trave , si dovrebbe costruire una forma triangolare della trave stessa. Per motivi di fattibilità, ovvero la possibilità di aggiungere una massa d'estremità, si è ricorso ad una forma leggermente modificata come la trapezoidale diretta. Un caso di studio alternativo è rappresentato dalla forma trapezoidale inversa, che va ad incrementare notevolmente la tensione all'incastro e migliora la possibilità di collegamento della massa d'estremità (Fig. 2.2).

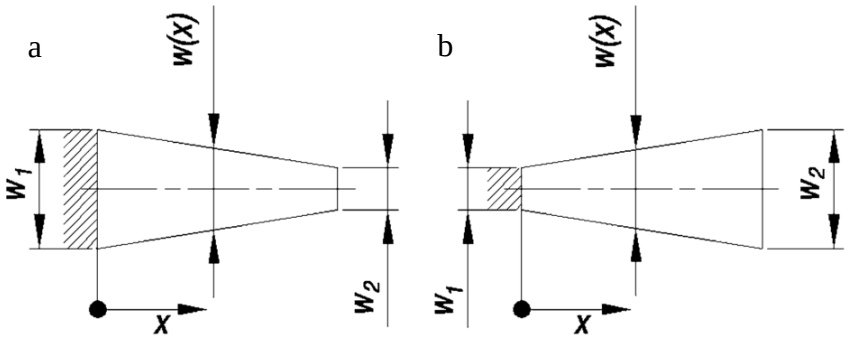

Fig. 2.2 *Travi: a) trapezoidale diretta; b) trapezoidale inversa*

Queste due forme in pianta hanno la proprietà di avere una larghezza variabile lungo l'apertura. Per una data posizione assiale x lungo la trave, la corrispondente larghezza $w(x)$, funzione dell'intera lunghezza l_b, segue l'equazione (2.1).

$$\begin{aligned} w(x)_{diretta} &= \frac{(w_1 - w_2)(l_b - x)}{l_b} + w_2 \\ w(x)_{inversa} &= \frac{(w_2 - w_1)x}{l_b} + w_1 \end{aligned} \tag{2.1}$$

La distribuzione delle tensioni massime di flessione lungo la lunghezza della trave è stata calcolata per una data massa d'estremità per la forma in pianta trapezoidale mantenendo la larghezza all'incastro w_1 costante e facendo decrescere la larghezza all'estremità w_2. Con lo stesso procedimento, ma invertendo le due estremità, è stata calcolata anche la tensione nella forma in pianta trapezoidale inversa. In (Fig. 2.3) sono visualizzati i risultati dello studio delle distribuzioni di tensione adimensionalizzate per le travi trapezoidali diretta ed inversa in funzione della posizione x. Si può notare che nel caso della forma in pianta inversa si hanno alte tensioni presenti all'incastro che poi tendono a scendere rapidamente spostandosi verso l'estremità. Queste potrebbero essere maggiori della resistenza del materiale ed inoltre predisporre ad una condizione di fatica del materiale. Nei riguardi dell'ottimizzazione della geometria delle travi, viene presa come riferimento la forma in pianta rettangolare.

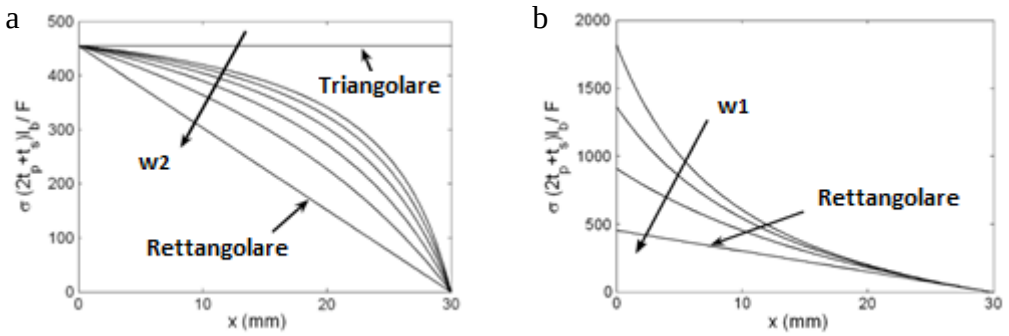

Fig. 2.3 *Distribuzione della tensione massima di flessione lungo l'apertura della trave calcolata per: a) trapezoidale diretta; b) trapezoidale inversa* [15]

Nel progettare le geometrie delle travi si è fatto riferimento ad un precedente studio [15], al quale sono stati fatti alcuni miglioramenti come i fori per l'istallazione della massa ed il supporto per l'incastro della base. Si è optato per la costruzione di due differenti tipologie di travi trapezoidali. In questo caso, sia considerando costante il volume totale di piezoelettrico, che mantenendo costante la larghezza massima, il tutto in relazione alla trave rettangolare (Fig. 2.4). Le geometrie sono dimensionate per avere tutte all'incirca la stessa frequenza di risonanza di 50 Hz.

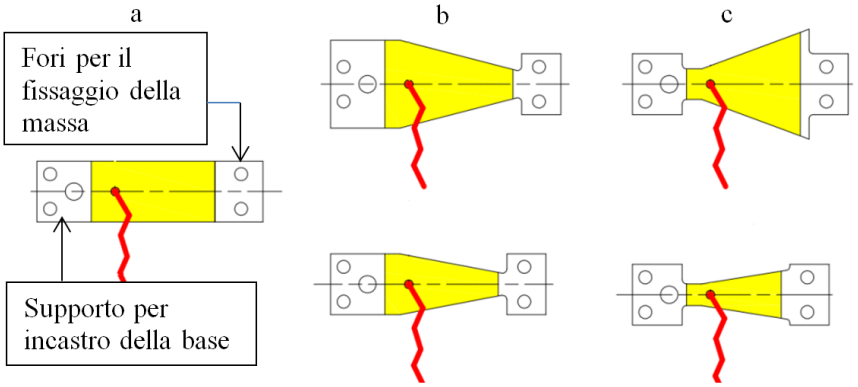

Fig. 2.4 *Prototipi di travi ottimizzate: (a) rettangolare; (b) trapezoidale diretta;(c) trapezoidale inversa. Quest'ultime sia a pari volume (alto) che a pari larghezza massima (basso).*

Le cinque travi così progettate, saranno poi realizzate utilizzando come materiale piezoelettrico il piombo-zirconato-titanato (PZT) denominato commercialmente PSI-5A4E polarizzato nella direzione dello spessore.
I due strati piezoelettrici sono collegati in serie (Fig. 2.5). Per il substrato metallico di sostegno viene impiegato dell'acciaio inossidabile, mentre per i due elettrodi superficiali si utilizza una deposizione di nickel.

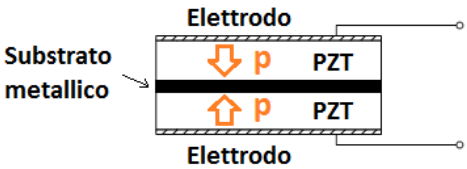

Fig. 2.5 *Collegamento in serie degli strati piezoelettrici*

Fissato un valore di resistenza elettrica, le simulazioni sono state condotte mantenendo costante l'ampiezza dell'accelerazione sinusoidale applicata alla base della trave e facendone variare la frequenza in un intervallo prefissato. La massa d'estremità risulta dimensionata in maniera tale da ottenere la frequenza di risonanza meccanica di progetto delle travi. Nella tabella sottostante (Tab. 2.1) sono indicati i principali parametri di studio utilizzati nelle simulazioni. Per lo smorzamento globale, non potendo essere definito rigorosamente a priori, si è assunto un valore comunemente usato in letteratura [18]. In Appendice A sono riassunte le geometrie quotate delle travi, mentre in Appendice C sono raccolte le matrici costitutive dei materiali.

Tab. 2.1 *Parametri delle simulazioni*

Materiale piezoelettrico	PSI-5A4E
Materiale substrato metallico	Acciaio inox
Materiale massa	Acciaio strutturale
Accelerazione base	280 [mm/s^2]
Intervallo resistenza elettrica	4,6 – 775 [kΩ]
Massa estremità	7,46 [g]
Smorzamento globale ζ_b	0,02

2.2 Modello ad elementi finiti

L'analisi numerica agli elementi finiti utilizza il programma ANSYS [19]. Le travi sono state modellate geometricamente in 3D e successivamente è stata eseguita una discretizzazione ad elementi finiti dei costituenti, dove sono stati introdotti sia gli accoppiamenti elettrici che la resistenza esterna, come già dimostrato da altri autori [20], [21]. Come condizione al contorno è stato applicato un vincolamento delle superfici superiore ed inferiore della base, a cui è stata imposta un'accelerazione sinusoidale verticale ad ampiezza costante sfruttando il metodo LMM (Large Mass Method). L'utilizzo di questo metodo deriva dal fatto che il programma impiegato non supporta l'immissione diretta di un'accelerazione sinusoidale per l'analisi armonica. Infine sono state eseguite due diverse analisi, una di tipo modale e l'altra armonica con lo scopo di effettuare la caratterizzazione elettromeccanica delle travi.

2.2.1 Costruzione del modello geometrico e definizione dei materiali

Nel seguito si illustrerà come esempio la procedura di modellazione con riferimento alla trave trapezoidale diretta. Viene rappresentato in (Fig. 2.6a) il suo modello geometrico semplificato costruito mediante il programma CAD tridimensionale Solid Edge™. Ogni parte costituente la trave bimorfa (quale massa, sostegno metallico interno e piezoelettrico) è identificata da un suo volume. Il modello finale viene ottenuto semplificando opportunatamente alcuni particolari costruttivi come la massa d'estremità (Fig. 2.6b), in modo tale da predisporlo ad una sua successiva migliore discretizzazione agli elementi finiti. La massa d'estremità reale risulta composta da due placche d'acciaio unite alla trave da due bulloni M3. La semplificazione adottata prevede una massa costituita da un parallelepipedo di lunghezza e larghezza invariate e lo spessore incrementato in modo tale da ottenere lo stesso valore della massa reale.

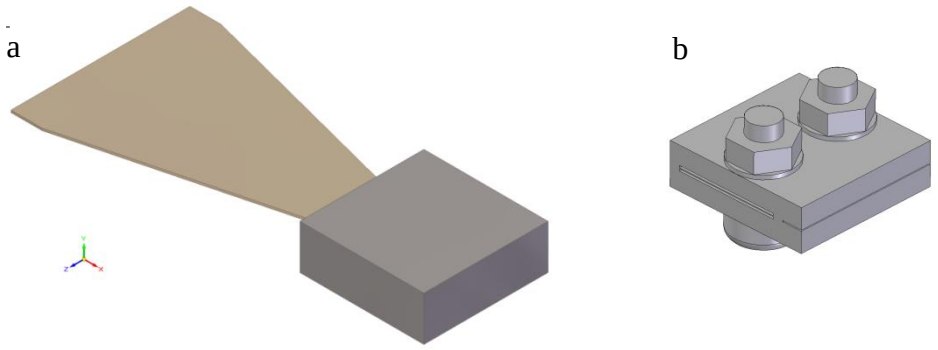

Fig. 2.6 *Modello geometrico: a) trave con massa semplificata; b) massa reale*

L'introduzione delle proprietà fisiche dei materiali si è suddivisa in due rappresentazioni differenti. Si è considerata sia la massa che il sostegno interno composti da materiale omogeneo ed isotropo, quindi definito solamente da due costanti elastiche (modulo di Young e coefficiente di Poisson).
Il materiale piezoelettrico, invece, è un materiale omogeneo e trasversalmente isotropo, definito direttamente dalla matrice di rigidezza unita alle matrici di accoppiamento elettrico e permittività dielettrica. In questa fase si è reso necessario un passaggio ulteriore di modifica delle matrici utilizzate, questo per passare dalla notazione ANSI/IEEE Standard 176-1987 a quella utilizzata dal programma ANSYS™ in cui l'asse di polarizzazione è l'asse *y*. In questo caso l'asse *z* e l'asse *y* risultano scambiati tra loro (Fig. 2.7).

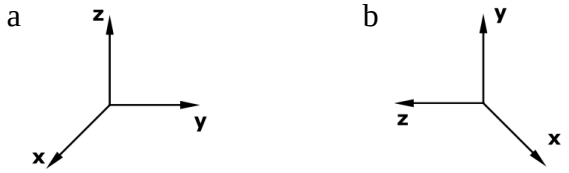

Fig. 2.7 *Sistema di riferimento: a) ANSI/IEEE; b) ANSYS™*

2.2.2 Introduzione degli elementi e generazione della mesh

Per discretizzare il modello agli elementi finiti sono stati utilizzati quattro tipi diversi di elementi, vedi (Fig. 2.8). La parte solida costituente la trave è stata modellata con elementi isoparametrici esaedrici ad 8 nodi a due diverse tipologie: una puramente strutturale a 3 gradi di libertà (SOLID45) per la massa d'estremità ed il sostegno interno, l'altra invece di tipo elettromeccanica accoppiata a 4 gradi di libertà (SOLID5) per il materiale piezoelettrico. Il circuito elettrico esterno è stato modellato con un elemento resistenza a 2 nodi ed 1 grado di libertà (CIRCU94). Per implementare il metodo LMM è stato invece introdotto anche un elemento massa ad 1 nodo e 3 gradi di libertà (MASS21).

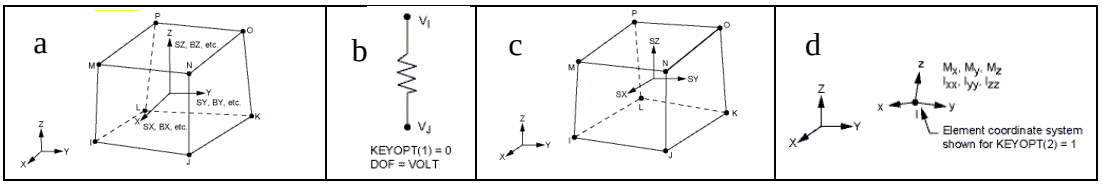

Fig. 2.8 *Tipi di elementi utilizzati: a) SOLID5; b) CIRCU94; c) SOLID45; d) MASS21*

La generazione della mesh è stata predisposta imponendo due elementi sullo spessore di ciascuno degli strati piezoelettrici e del sostegno metallico, inoltre è stata imposta la dimensione globale dell'elemento pari a 1 mm di lato. Questo ha generato una griglia regolare di suddivisione dei vari volumi costituenti (Fig. 2.9).
In questa fase si è cercato un compromesso tra la necessità di ottenere a calcolo la convergenza della soluzione e l'obiettivo di contenere il tempo complessivo del calcolo. Avendo introdotto un materiale trasversalmente isotropo, è stato necessario introdurre due altri sistemi di riferimento utilizzati per allineare secondo l'asse di polarizzazione gli elementi costituenti il materiale piezoelettrico (Fig. 2.5).

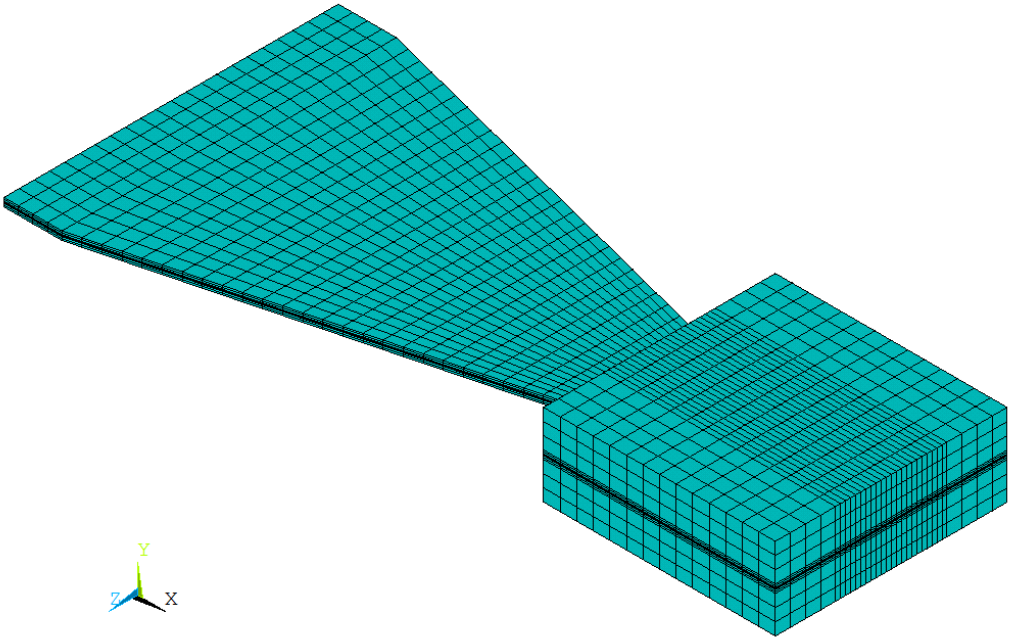

Fig. 2.9 *Modello agli elementi finiti della trave trapezoidale diretta*

Lungo lo spessore della trave, la deformazione dovuta alla flessione della trave assume un andamento lineare caratteristico a farfalla. Avendo utilizzato elementi lineari per la modellazione strutturale, si è valutato l'utilizzo di 2 elementi per ciascuno strato per descrivere tale andamento della deformazione (Fig. 2.10), con un totale di 6 elementi sull'intero spessore. La dimensione del lato dell'elemento utilizzato è stata di 1 mm. Da un'analisi di convergenza effettuata, tali valori di grandezza dell'elemento e numero di elementi per ciascuno strato sono risultati un compromesso accettabile tra le soluzioni ottenute ed i tempi di calcolo. Inoltre, per questa analisi non si sono utilizzati elementi a 20 nodi, usati per cogliere andamenti parabolici, in quanto la variazione lineare della deformazione non giustifica i tempi di calcolo superiori rispetto ai benefici di una soluzione più precisa.

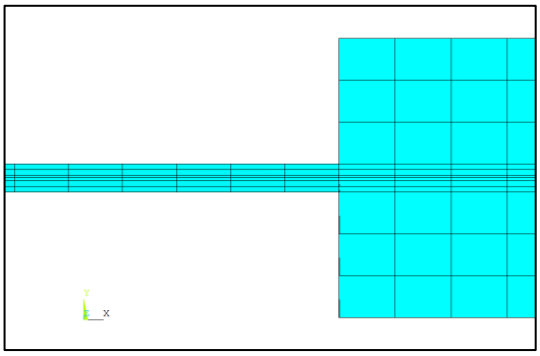

Fig. 2.10 *Particolare della mesh nello spessore della trave*

2.2.3 Inserimento accoppiamenti elettrici, vincolamento e LMM

Dal punto di vista elettrico (Fig. 2.11), sul modello sono state create superfici equipotenziali mediante un vincolamento nodale, sia delle aree corrispondenti agli elettrodi che dell'intero sostegno metallico. Inoltre, in corrispondenza della superficie dell'elettrodo superiore è stato imposto un potenziale nullo di riferimento. Presi poi due singoli nodi, uno appartenente all'elettrodo superiore e l'altro a quello inferiore, è stata inserita una resistenza esterna di valore assegnato. Questo metodo consente così la rapida estrazione dei valori di caduta di potenziale direttamente ai capi della resistenza elettrica applicata per il successivo calcolo della potenza elettrica istantanea generata dai due strati piezoelettrici.

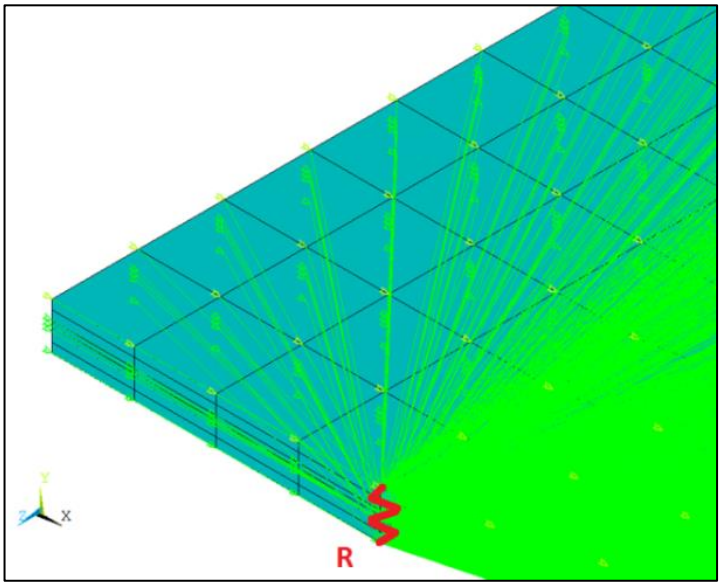

Fig. 2.11 *Particolare della base della trave con creazione di superfici equipotenziali agli elettrodi ed al sostegno metallico. Imposizione di potenziale nullo alla superficie dell'elettrodo superiore ed inserimento della resistenza elettrica esterna tra i due elettrodi.*

Dal punto di vista meccanico (Fig. 2.12), con riferimento ai nodi giacenti sulla superficie della base della trave, sono state impedite le traslazioni lungo l'asse orizzontale ed assiale della trave (X,Z) lasciando come grado di libertà la traslazione sull'asse verticale (Y), per permettere il successivo movimento verticale sinusoidale della trave in vibrazione per l'analisi armonica. Dal punto di vista dell'analisi modale, invece, è stata impedita anche questa traslazione verticale.

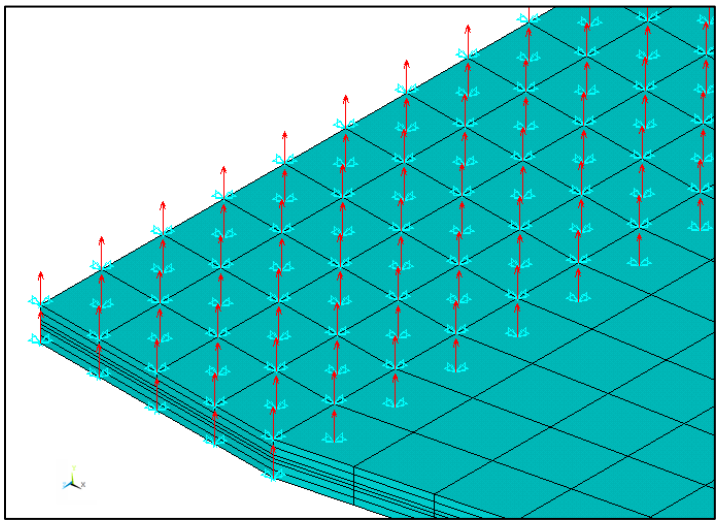

Fig. 2.12 *Particolare del vincolamento della base della trave con applicazione delle forze agli elementi massa tali da imporre l'accelerazione voluta*

Con il programma ANSYS Mechanical™ è possibile effettuare direttamente un'analisi armonica a spostamento imposto, invece non risulta agevole l'applicazione di un'accelerazione costante. Per consentire tale tipologia di analisi, si è optato per l'utilizzo del metodo "large mass method" (LMM). Esso consiste nell'introduzione di masse fittizie equamente distribuite, in corrispondenza dei nodi della base già vincolati precedentemente, la cui sommatoria dia un valore di almeno tre ordini di grandezza superiore alla massa complessiva del modello. Fissato un valore all'accelerazione a della base, si vanno ad applicare a suddette masse m_i delle forze fittizie F_i in direzione verticale (Y), corrispondente al grado di libertà del modello, la cui sommatoria è calcolata come:

$$F_{tot} = m_{tot\,LMM} \cdot a \tag{2.2}$$

2.3 Soluzione dell'analisi modale

L'analisi modale consente di ricavare informazioni utili sul comportamento dinamico della struttura. Lo studio della vibrazione è una tecnica che consente di identificare i modi di vibrare di una struttura, ognuno dei quali definito da sua frequenza caratteristica, smorzamento e forma modale. Nel caso dello studio delle travi piezoelettriche, si è considerato solamente il primo modo di vibrare (Fig. 2.13), detto fondamentale, in quanto è quello che viene eccitato alla frequenza più bassa caratteristica del sistema. Inoltre esso genera spostamenti maggiori della struttura rispetto ai modi propri superiori e quindi di conseguenza anche deformazioni interne maggiori del materiale. Questo perché nel primo modo di vibrare della trave, la sollecitazione agisce in modo 31, che è quello ottimale per il tipo di polarizzazione dello strato di materiale piezoelettrico.

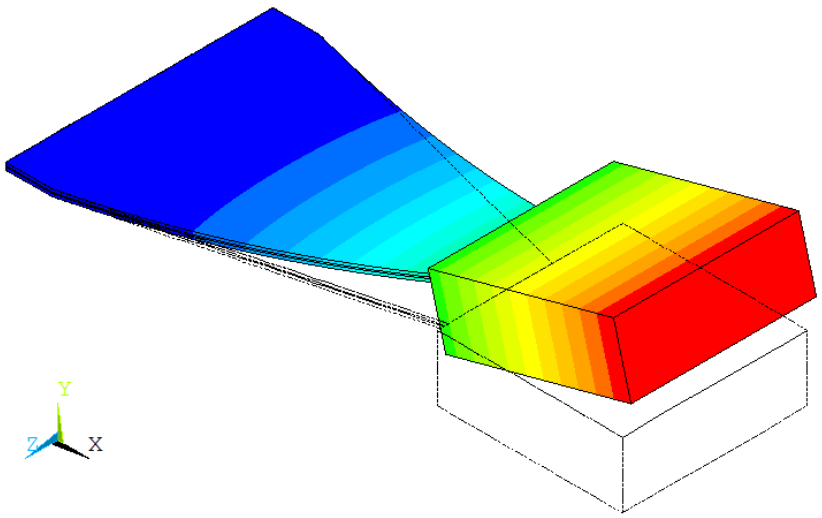

Fig. 2.13 *Primo modo di vibrare della trave trapezoidale diretta*

Le travi sono state progettate per ottenere una frequenza di risonanza fondamentale prossima ai 50 Hz. Mediante il calcolo numerico con il modello semplificato, si è potuto ricavare il valore della frequenza naturale del primo modo per ciascuna trave.

Tab. 2.2 *Frequenze di risonanza fondamentali delle travi*

Rettangolare	55,9 [Hz]
Trapezoidale diretta	54,7 [Hz]
Trapezoidale inversa	55,3 [Hz]
Trapezoidale diretta ridotta	54,5 [Hz]
Trapezoidale inversa ridotta	54,4 [Hz]

Per l'analisi modale è stato preso in considerazione solamente il puro comportamento meccanico della struttura, non considerando i gradi di libertà elettrici (cortocircuito). Tale valore rimane il riferimento per il calcolo dell'analisi armonica, a cui tende a corrispondere quando il circuito elettrico esterno è prossimo ad un cortocircuito (R=0). I valori mostrati in (Tab. 2.2) confermano che le geometrie hanno frequenza di risonanza prossima al valore di progetto di 50 Hz.

2.4 Soluzione dell'analisi armonica

L'analisi armonica ha lo scopo di calcolare il comportamento dinamico di una struttura quando viene sottoposta ad una vibrazione sinusoidale. Nel caso in esame tale grandezza variabile nel tempo è stata l'accelerazione imposta alla base delle travi, sfruttando il metodo precedentemente descritto come LMM. Le varie grandezze di interesse in uscita sono state così calcolate e diagrammate in un grafico in funzione della frequenza. Nello specifico l'accelerazione, di modulo sempre costante, ha una frequenza variabile tra due valori limite che comprendono nel loro intervallo la frequenza di risonanza fondamentale. Questa procedura è stata poi ripetuta per ciascuno dei valori della resistenza esterna applicata. A questo scopo si è costruito un programma in linguaggio APDL di Ansys Mechanical™, che risolvesse

in maniera automatica le varie simulazioni del modello per ciascuna resistenza. I dati ottenuti sia in formato testo (.txt) che di risultati (.rst), venivano salvati in delle cartelle appositamente create in automatico. Una successiva elaborazione con Matlab™ andava poi a creare dei grafici, che venivano infine direttamente visualizzati in Excel™, vedi schema di (Fig. 2.14).

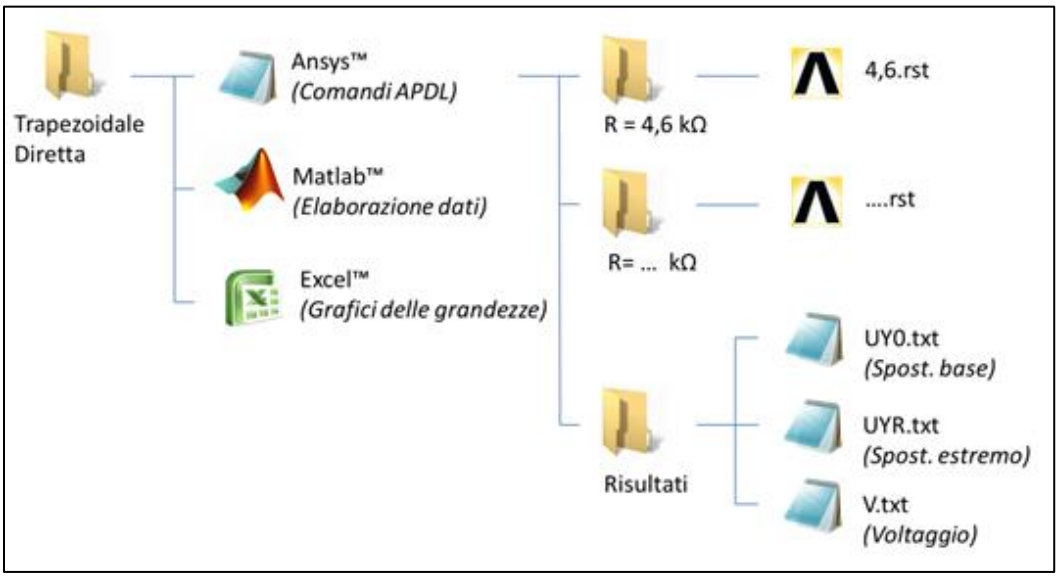

Fig. 2.14 *Schema del processo di calcolo numerico per la trave trapezoidale diretta*

Prendendo come riferimento la trave trapezoidale diretta a pari volume, sono di seguito illustrate due grandezze in funzione della frequenza relativa all'accelerazione imposta alla base. In (Fig. 2.15) si nota l'andamento del modulo della risposta in frequenza tra lo spostamento dell'estremità e quello della base al variare della frequenza. Dalla curva del modulo si può determinare sia il suo valore di picco $|FT|_{max}$ che la corrispondente frequenza di risonanza $f_{r\ |FT|}$. Le curve di riferimento sono la prima in alto a sinistra per una condizione tendente al cortocircuito ($R \rightarrow 0$) e la prima in alto a destra per la condizione tendente al circuito aperto ($R \rightarrow \infty$). Le curve si sviluppano in senso antiorario all'aumentare del valore della resistenza esterna applicata. Inoltre, si nota principalmente che la frequenza di risonanza cresce al crescere della resistenza applicata. Anche il valore dello smorzamento, deducibile dalla forma più o meno pronunciata del picco della curva, parte da un valore alto alle basse resistenze e raggiunge un valore minimo alle medie resistenze per poi aumentare nuovamente alle alte resistenze.
In figura (Fig. 2.16) si nota l'andamento delle curve di voltaggio generato dal piezoelettrico u_{max} al variare della frequenza per ogni valore di resistenza esterna applicata. Le curve di riferimento sono la più bassa per una condizione tendente al cortocircuito ($R \rightarrow 0$) e la più alta per la condizione tendente al circuito aperto ($R \rightarrow \infty$). Anche da questo grafico si nota principalmente che la frequenza di risonanza, corrispondente al punto di massimo relativo della curva d'interesse, cresce al crescere della resistenza applicata. Inoltre anche il valore dello smorzamento segue il comportamento precedentemente citato.
Elaborando i dati, risulta possibile determinare i valori di grandezze caratteristiche per ogni trave ad una data resistenza, ovvero: voltaggio massimo generato dal piezoelettrico u_{max}, spostamento massimo dell'estremità alla risonanza ν_{max}, valore

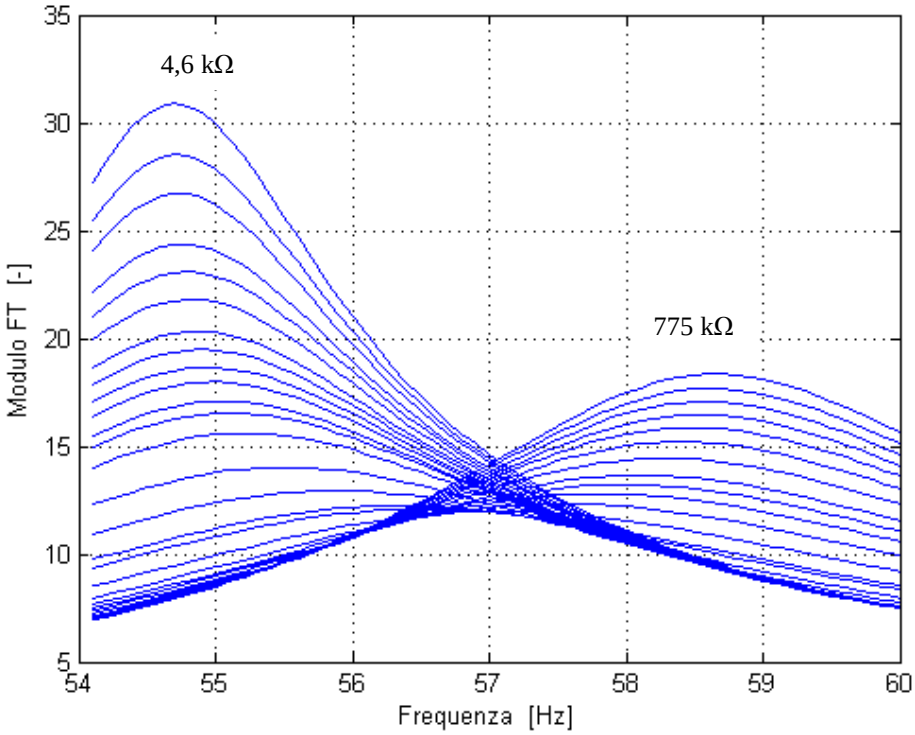

Fig. 2.15 *Andamento delle curve del modulo della funzione di trasferimento dello spostamento estremo-base per valori di resistenza crescente calcolate al FEM per la trave trapezoidale diretta*

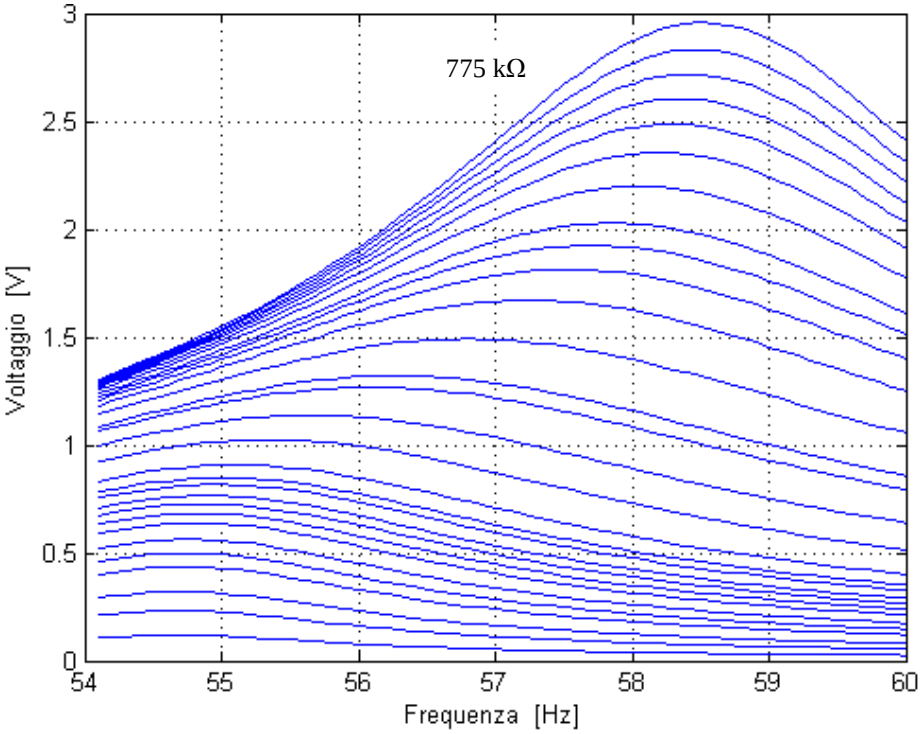

Fig. 2.16 *Andamento delle curve di voltaggio in funzione della frequenza per valori di resistenza crescente calcolato al FEM per la trave trapezoidale diretta*

massimo del modulo della funzione di trasferimento dello spostamento estremità-base $|FT|_{max}$ e frequenza di risonanza $f_{r\ |FT|}$, potenza elettrica P_{max} e potenza elettrica specifica volumica $P_{S\ max}$ massime generate. Per quanto riguarda il calcolo della potenza elettrica generata sulla resistenza R, si è usata la formula seguente:

$$P_{max} = \frac{u_{max}^2}{2 \cdot R} \cdot 10^6 \quad [\mu W] \tag{2.3}$$

Nel calcolo invece della potenza elettrica specifica volumica, si è diviso il valore della potenza calcolata con la formula precedente per il volume totale di materiale piezoelettrico. Il valore del volume è di 140 mm^3 nel caso di travi rettangolare e trapezoidali a pari volume, mentre per le travi a pari ingombro laterale si è usato 87,7 mm^3 per la trapezoidale diretta e 57,9 mm^3 per l'inversa.

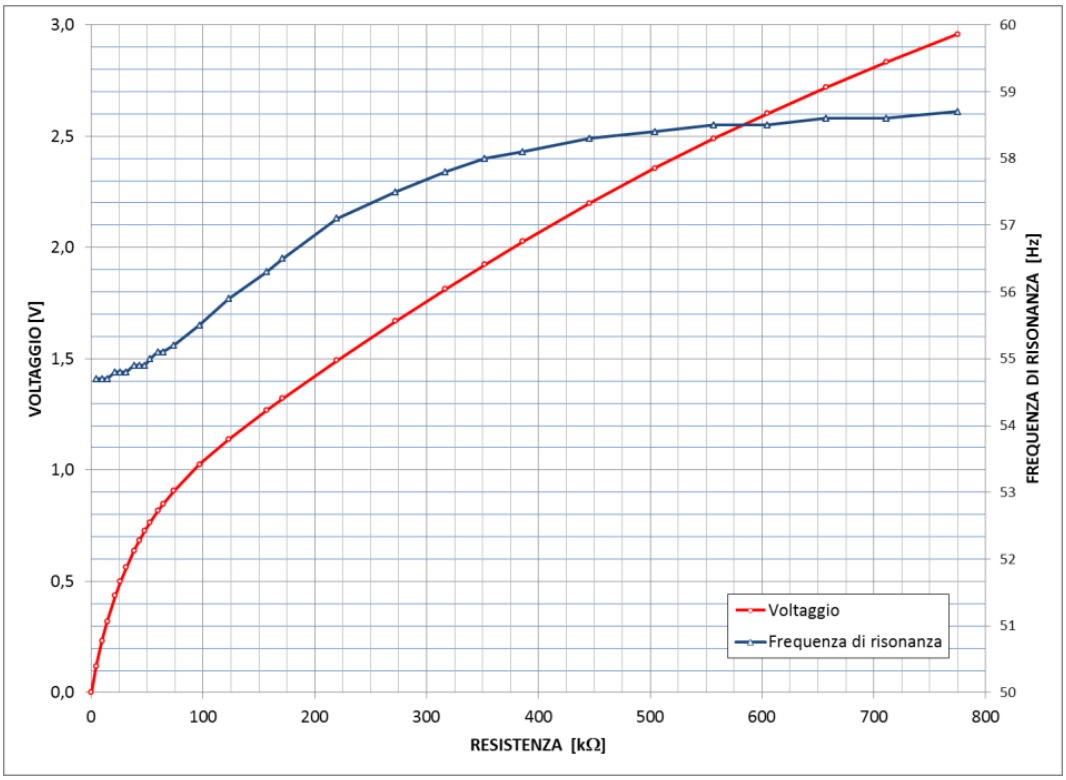

Fig. 2.17 *Esempio di curve di caratterizzazione FEM di voltaggio e frequenza di risonanza ricavate per la trave trapezoidale diretta*

In figura (Fig. 2.17) sono visibili le curve del voltaggio del piezoelettrico e della frequenza di risonanza, le quali sono caratterizzate da un andamento parabolico. Si osserva che la curva del voltaggio ha un andamento crescente dalle basse alle alte resistenze, partendo da un valore nullo e tendendo ad un asintoto quando la resistenza va all'infinito. Questo si spiega dal fatto che il circuito segue il principio della legge di Ohm. La frequenza di risonanza invece tende a crescere da un dato valore in cortocircuito ad un valore di poco superiore a circuito aperto. Il fenomeno che si viene ad instaurare è un incremento della rigidezza del materiale piezoelettrico

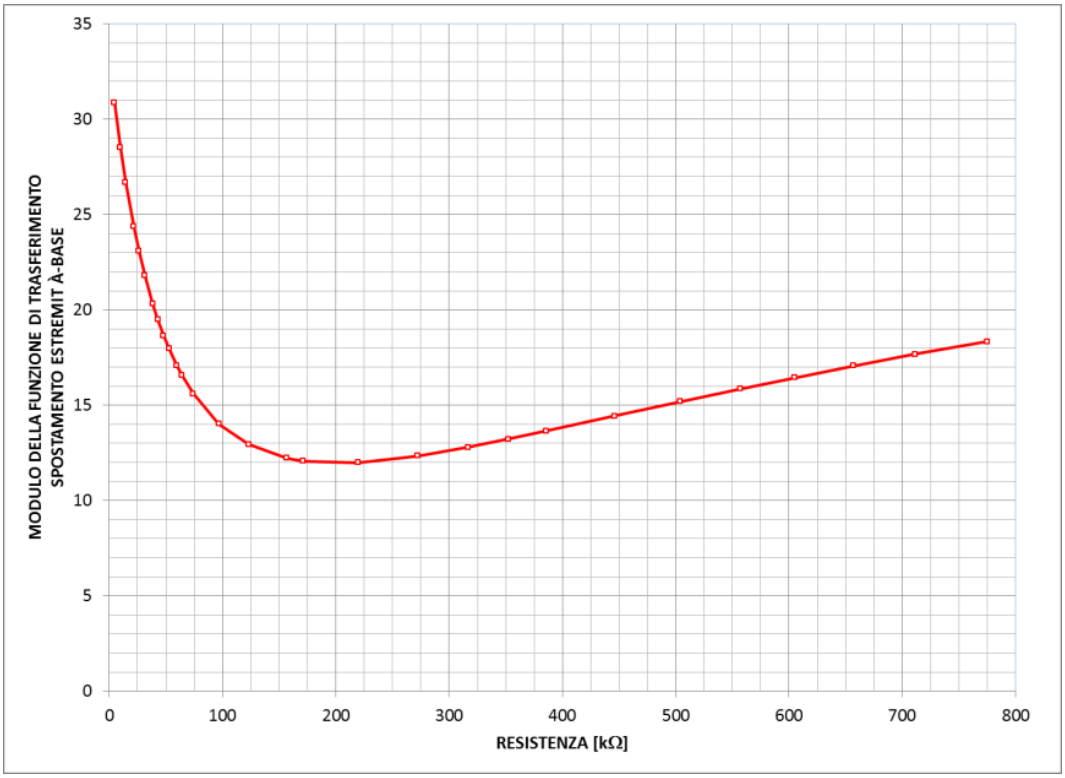

Fig. 2.18 *Esempio di curve di caratterizzazione FEM del modulo della funzione di trasferimento dello spostamento estremo-base ricavate per la trave trapezoidale diretta*

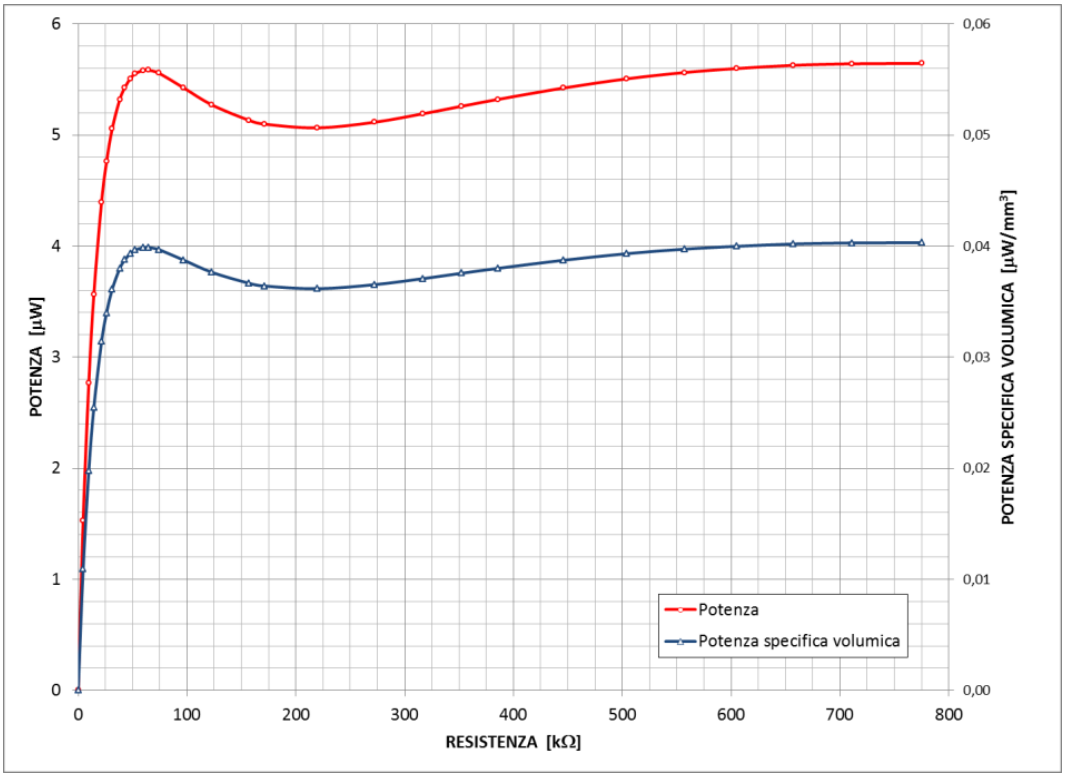

Fig. 2.19 *Esempio di curve di caratterizzazione FEM di potenza e potenza specifica volumica ricavate per la trave trapezoidale diretta*

dovuto all'effetto di accumulo al suo interno delle cariche elettriche per effetto elettromeccanico. In figura (Fig. 2.18) è visibile la curva del modulo della funzione di trasferimento dello spostamento estremo-base, caratterizzata da un andamento che presenta un punto di minimo relativo. Si osserva che la curva parte da un valore di picco alle basse resistenze e tende ad un valore asintotico quasi dimezzato alle alte resistenze. Anche in questo caso entra in gioco l'effetto della variazione di rigidezza del materiale piezoelettrico per effetto elettromeccanico.
In figura (Fig. 2.19) sono visibili le curve della potenza elettrica e della potenza elettrica specifica volumica, ove entrambe sono caratterizzate da un andamento che partendo da un valore nullo presenta un picco nell'intorno delle basse resistenze, dopodiché tendono ad avere un punto di minimo relativo per poi ricrescere alle alte resistenze ad un valore superiore quasi pari al punto di massimo relativo precedente. Il punto di massimo relativo viene a trovarsi in corrispondenza del valore di resistenza pari alla resistenza elettrica interna del materiale piezoelettrico.

2.5 Confronto tra le curve di caratterizzazione FEM al variare della resistenza applicata

Terminata la caratterizzazione elettromeccanica numerica per ciascuna tipologia di travi, è stato possibile fare un confronto per stabilire quale geometria offrisse le prestazioni migliori nei confronti della potenza elettrica estraibile. Di seguito sono stati sviluppati una serie di diagrammi che contengono le curve di tutte le grandezze caratteristiche principali delle diverse travi al variare della resistenza elettrica applicata confrontate tra loro, nello specifico:

- voltaggio generato dal piezoelettrico;
- modulo della funzione di trasferimento dello spostamento estremo-base;
- frequenza di risonanza;
- potenza elettrica;
- potenza elettrica specifica volumica.

2.5.1 Andamento del voltaggio

Dalle curve dell'andamento del voltaggio u_{max} al variare della resistenza elettrica applicata (Fig. 2.20), si può notare un andamento parabolico caratteristico per tutte le tipologie di travi. Alle basse resistenze, le curve delle travi tendono a sovrapporsi con eccezione della trapezoidale inversa a pari ingombro laterale. Mentre alle alte resistenze i valori asintotici di tensione, nell'intorno dei 3 V, si discostano tra loro del 10%.

2.5.2 Andamento del modulo della funzione di trasferimento dello spostamento estremo-base

Dalla curva dell'andamento del modulo della funzione di trasferimento spostamento estremità-base $|FT|_{max}$ al variare della resistenza elettrica applicata (Fig. 2.21), si può notare un andamento con presenza di un minimo relativo caratteristico per tutte le tipologie di travi. Anche in questo caso alle basse resistenze, le curve presentano dei valori di picco nell'intorno di 30 con scostamento tra gli estremi del 10%, il più alto per la trave trapezoidale inversa a pari ingombro laterale ed il più basso per la

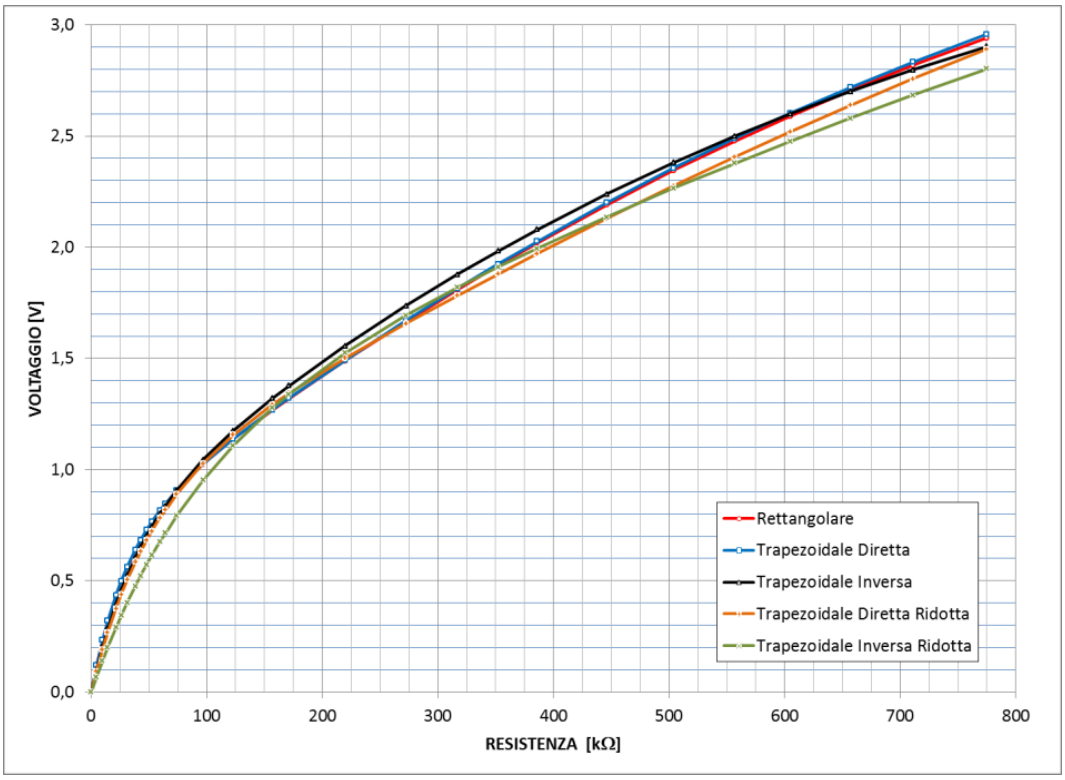

Fig. 2.20 *Confronto tra le curve FEM di voltaggio delle travi al variare della resistenza elettrica applicata*

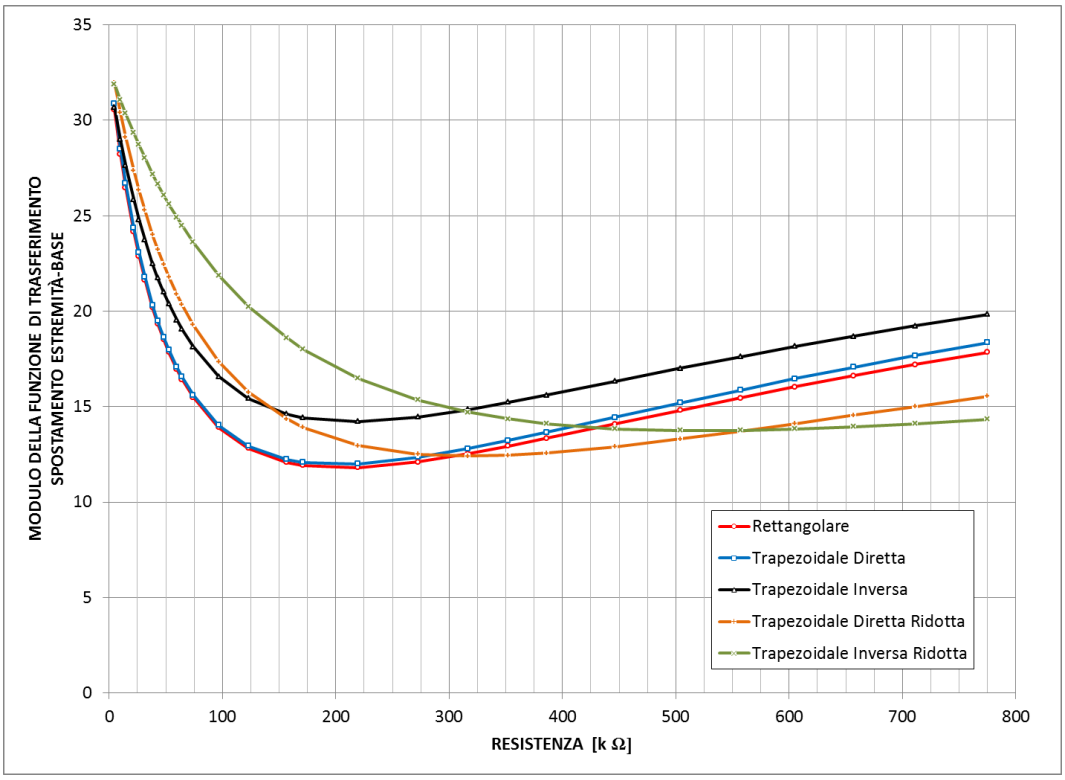

Fig. 2.21 *Confronto tra le curve FEM dei moduli della FT estremo-base delle travi al variare della resistenza elettrica applicata*

rettangolare. Inoltre, nell'intervallo di resistenza da 100 a 200 kΩ, le curve delle travi rettangolare e trapezoidali a pari volume presentano un minimo relativo, molto più spostato invece alle alte resistenze per le travi trapezoidali a pari ingombro laterale. Mentre alle alte resistenze i valori asintotici del modulo, nell'intorno di 17, si discostano tra loro del 40%.

2.5.3 Andamento della frequenza di risonanza

Dalla curva dell'andamento della frequenza di risonanza $f_{r\ |FT|}$ al variare della resistenza elettrica applicata (Fig. 2.22), si può notare un andamento caratteristico crescente non lineare simile per tutte le tipologie di travi. Alle basse resistenze il valore di frequenza di risonanza risulta nell'intorno dei 55 Hz, con il minimo a 54,3 Hz per la trave trapezoidale inversa a pari ingombro ed il massimo a 56 Hz per la trave rettangolare. Considerati gli andamenti simili delle curve, alle alte resistenze si ottiene un valore minimo di circa 56,7 Hz per la trave trapezoidale inversa a pari ingombro con incremento del 4,2% ed il massimo di quasi 60 Hz per la trave trapezoidale diretta a pari volume con incremento del 6,7%. La curvatura di quest'ultima risulta la più pronunciata.

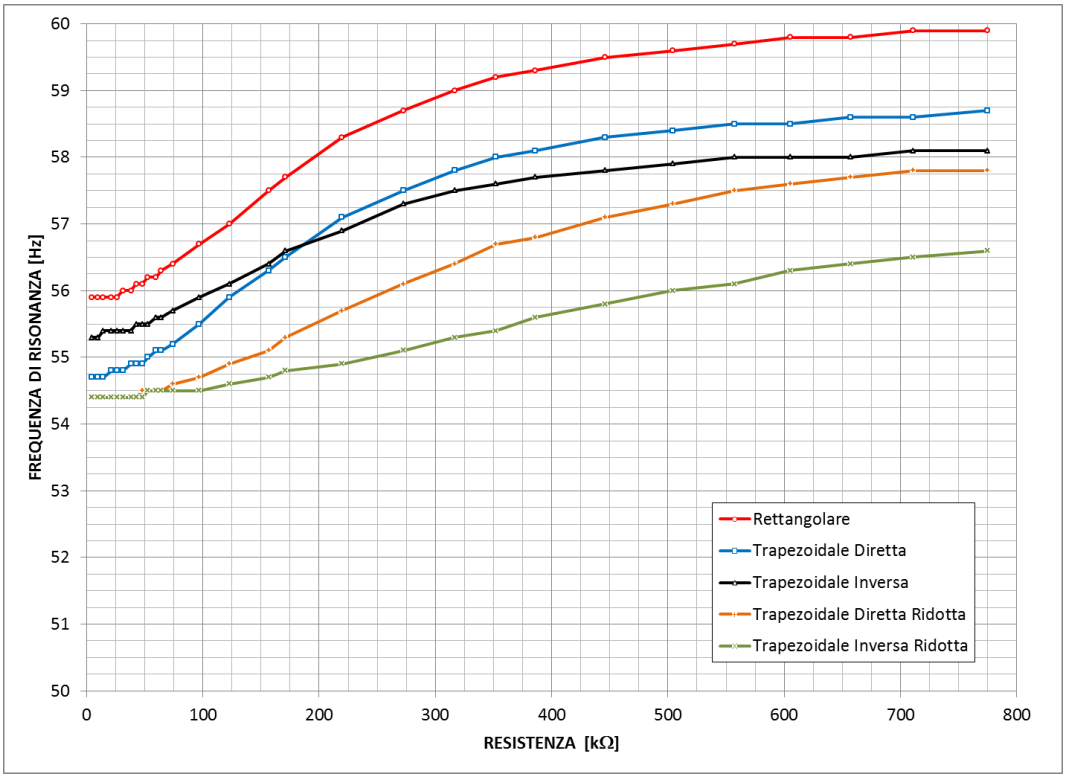

Fig. 2.22 *Confronto tra le curve FEM della frequenza di risonanza (<FT>) delle travi al variare della resistenza elettrica applicata*

2.5.4 Andamento della potenza

Dalla curva dell'andamento della potenza elettrica P_{max} al variare della resistenza elettrica applicata (Fig. 2.23), si può notare un picco alle basse resistenze con un successivo punto di minimo relativo per poi tendere per le alte resistenze ad un valore asintotico di valore prossimo al valore di massimo relativo precedente. Il picco massimo con una curvatura piuttosto modesta e di quasi 5,6 μW è

rappresentato dalla trave trapezoidale diretta a pari volume, mentre quello minimo di 5,2 μW è generato dalla trave trapezoidale inversa a pari ingombro laterale. Il valore asintotico pari a circa 5,5 μW è raggiunto in maniera simile da tutte le tipologie di travi con uno scarto totale del 15%. Si osserva che il valore della resistenza associata al picco è molto inferiore per la trave trapezoidale diretta a pari volume (circa 50 kΩ) che rispetto a quella trapezoidale inversa a pari ingombro laterale (circa 220 kΩ).

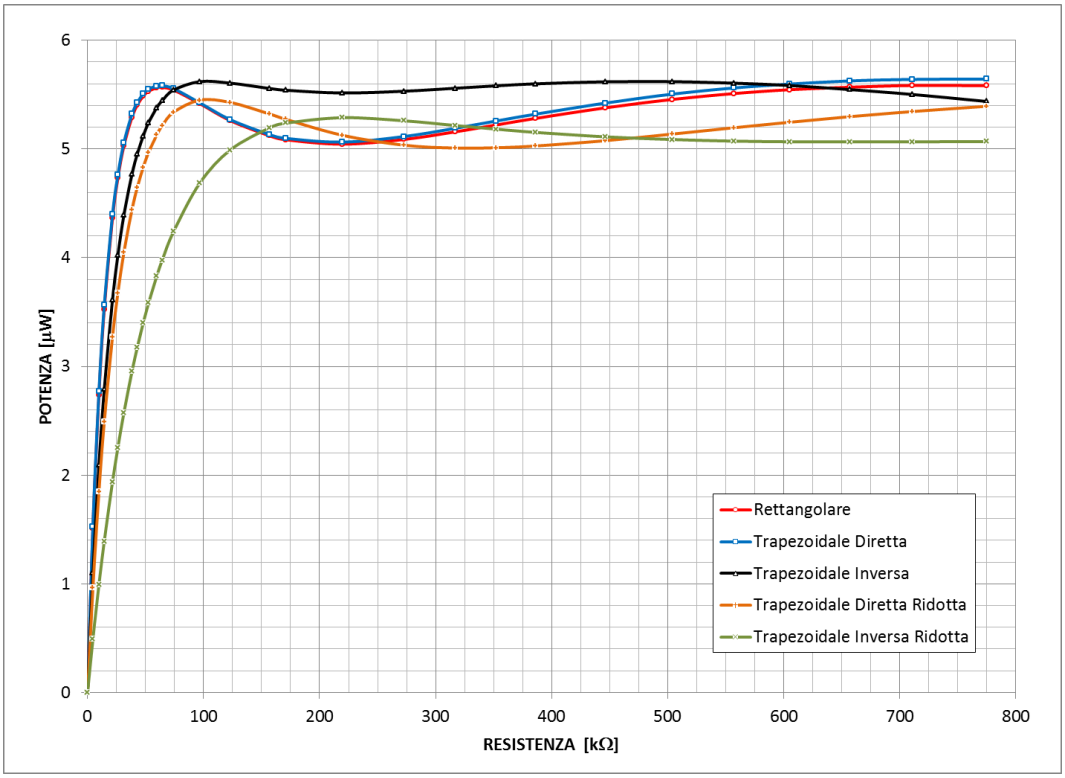

Fig. 2.23 *Confronto tra le curve FEM di potenza delle travi al variare della resistenza elettrica applicata*

2.5.5 Andamento della potenza specifica volumica

Dalla curva dell'andamento della potenza elettrica specifica volumica $P_{S\ max}$ al variare della resistenza elettrica applicata (Fig. 2.24), si possono notare andamenti simili ai precedentemente descritti della potenza elettrica, solamente si ha una variazione della scala delle curve rappresentanti le varie tipologie di travi. In quest'ottica si nota che la trave trapezoidale inversa a pari ingombro laterale raggiunge il picco massimo di circa 0,092 μW/mm^3, mentre il valore minimo di circa 0,04 μW/mm^3 è generato dalla trapezoidale inversa a pari volume. Anche in questo caso, si osserva che il valore della resistenza associata al picco è molto inferiore per la trave trapezoidale diretta a pari volume (circa 50 kΩ) che rispetto alla trapezoidale inversa a pari ingombro laterale (circa 220 kΩ). Il valore asintotico medio pari a circa 0,06 μW/mm^3 è raggiunto con uno scarto totale molto alto, pari al 60%. In questo caso la trave trapezoidale inversa a pari ingombro laterale tende ad un valore di 0,088 μW/mm^3, mentre la trapezoidale inversa a pari volume tende al valore di 0,04 μW/mm^3.

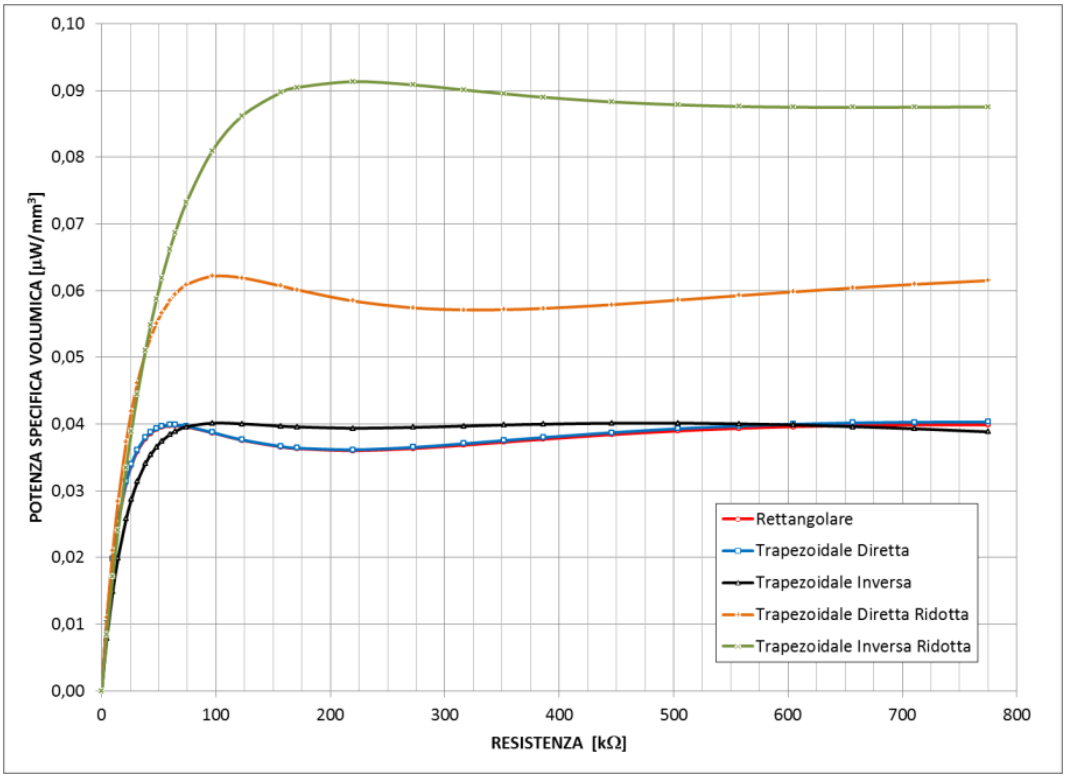

Fig. 2.24 *Confronto tra le curve FEM di potenza specifica volumica delle travi al variare della resistenza elettrica applicata*

2.5.6 Conclusioni

Dalla simulazione numerica si evince che le travi a geometria ottimizzata generano una potenza massima P_{max} di poco superiore alla trave di riferimento rettangolare (Tab. 2.3). Diventa invece evidente l'incremento di potenza specifica volumica $P_{S\,max}$ delle travi trapezoidali ridotte rispetto alla rettangolare.

Tab. 2.3 *Confronto tra i valori di potenza generata dalle travi*

	P_{max} [µW]	$P_{S\,max}$ [µW/mm^3]
Rettangolare	5.57	0.039
Trapezoidale Diretta	5.58	0.039
Trapezoidale Inversa	5.62	0.040
Trapezoidale Diretta Ridotta	5.45	0.062
Trapezoidale Inversa Ridotta	5.29	0.091

Il risultato ottenuto rimane da rivalutare in funzione dello smorzamento. Come verrà spiegato nel Capitolo 3, tale valore è dipendente dalla geometria della trave. Esso tende ad assumere valori differenti per ciascuna geometria, ma in questo caso di studio viene mantenuto ad un valore fisso di ζ_b =0,02 per tutte le travi. Dopo la sperimentazione, per ciascuna trave sarà possibile rivalutare tale valore con il metodo della mezza potenza. Questo permetterà un ricalcolo delle curve di caratterizzazione elettromeccanica ottenute numericamente. Inoltre, verrà presentato un confronto tra i valori di potenza, normalizzati rispetto all'accelerazione di gravità, ottenuti sperimentalmente rispetto ai valori riportati in letteratura.

3 Ottimizzazione della geometria: prove sperimentali

In questo capitolo si presentano i risultati della caratterizzazione elettromeccanica sperimentale delle travi bimorfe ottimizzate analizzate nel capitolo precedente. A questo scopo è stato utilizzato un sistema integrato di strumenti per l'acquisizione dei segnali ed inoltre l'impiego di elaboratori con specifici programmi per la successiva analisi dei dati. Di seguito verrà descritto il sistema sperimentale composto da varie strumentazioni. Inoltre saranno poi raffigurati i grafici di confronto tra le varie tipologie di travi con le grandezze di interesse misurate. L'obbiettivo è quello di valutare l'incremento di potenza elettrica generata dalle travi a forma trapezoidale, rispetto alla geometria rettangolare.

3.1 Tipologie di travi piezoelettriche

In questa sperimentazione sono state caratterizzate elettromeccanicamente cinque diverse geometrie di travi piezoelettriche (Fig. 3.1). I disegni costruttivi quotati delle travi sono inseriti in Appendice A.

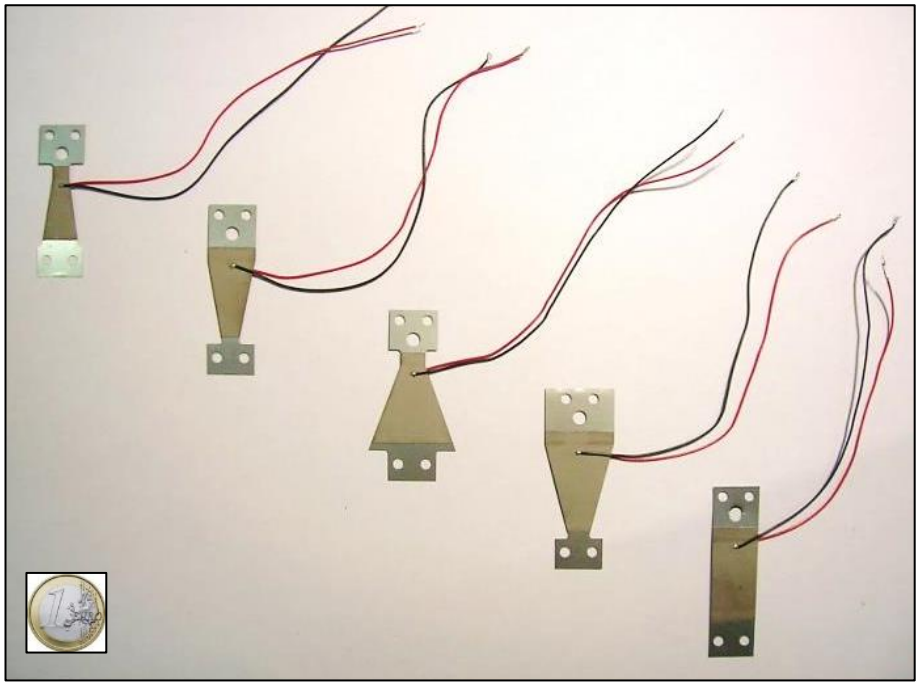

Fig. 3.1 *Travi piezoelettriche a diverse geometrie*

Facendo riferimento come geometria standard alla forma rettangolare, sono state studiate altre due varianti: una trapezoidale diretta e l'altra inversa.
Entrambe tali geometrie sono state realizzate sia a parità di ingombro laterale massimo rispetto alla geometria rettangolare (trapezoidale diretta e trapezoidale inversa) che a parità di volume totale di materiale piezoelettrico (trapezoidale diretta ridotta e trapezoidale inversa ridotta). I materiali costituenti le travi, fornite dalla Piezo Systems™, risultano essere due strati di piezoelettrico PSI-5A4E polarizzati in serie (vedi Appendice C) e ricoperti da elettrodi al nickel, entrambi incollati ad un supporto centrale in acciaio inossidabile.

3.2 Sistema sperimentale globale

Per la caratterizzazione elettromeccanica delle travi piezoelettriche sono state utilizzate nove strumentazioni differenti (Fig. 3.2), alcune delle quali anche accoppiate tra loro:

1. afferraggio travi piezoelettriche;
2. misura dello spostamento della base della trave con correnti indotte;
3. misura dello spostamento dell'estremo della trave con sensore laser;
4. misura dell'accelerazione della base della trave con accelerometro;
5. generazione delle oscillazioni con lo shaker;
6. controllo analogico in retroazione dell'accelerazione della base della trave;
7. acquisizione dati e controllo digitale;
8. variazione automatica delle resistenze;
9. visualizzazione dei segnali campionati in tempo reale e di sicurezza.

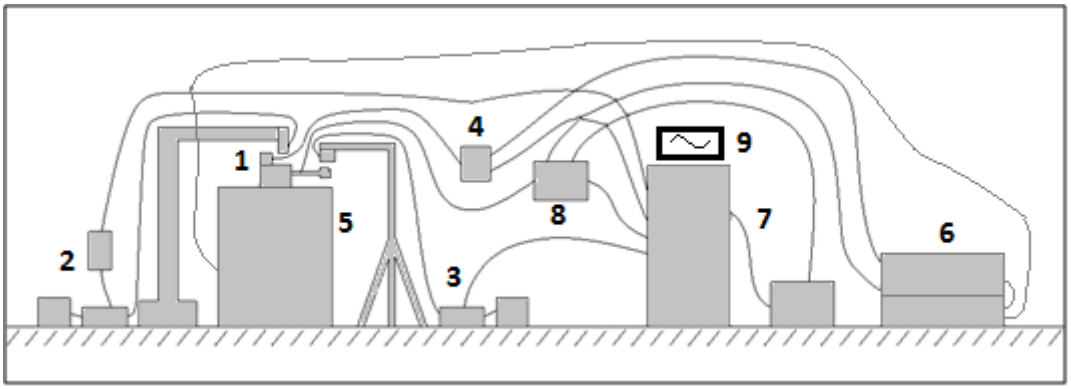

Fig. 3.2 *Schema grafico del sistema sperimentale d'insieme (vedi Fig. 3.3)*

Nel suo complesso il sistema opera in maniera semiautomatica, ovvero all'operatore rimane solamente il compito del set-up iniziale e della supervisione. Primariamente la trave, provvista di massa d'estremità, viene posizionata nell'afferraggio (1) fissato sul piano oscillante dello shaker (5) ed inoltre collegata tramite cavo elettrico al sistema di variazione automatica delle resistenze (8). All'afferraggio viene quindi applicato, tramite una vite, l'accelerometro (4). Successivamente vengono posizionati i sistemi di misura dello spostamento a correnti indotte (2) e laser (3). Prima di iniziare la prova, il sensore a correnti indotte deve essere calibrato. Fissato un valore della resistenza elettrica la trave è quindi posta in vibrazione alla base.

I quattro segnali da acquisire (voltaggio del piezoelettrico, spostamento d'estremità della trave, spostamento ed accelerazione della base della trave) vengono così campionati digitalmente (7) e visualizzati (9). Qualora uno di essi assuma valori superiori ad un limite prefissato, entra in azione il blocco di sicurezza che termina istantaneamente la prova. In questo modo si evita che la trave bimorfa possa rompersi, se eccitata accidentalmente a valori superiori ai parametri imposti (es. instabilità del controllore). Il segnale dell'accelerometro viene inoltre elaborato dal controllore analogico (6) che comanda in retroazione a sua volta l'ampiezza e frequenza delle oscillazioni dello shaker. Per il sistema d'insieme, la disposizione delle varie apparecchiature è stata studiata in maniera da ottenere il miglior compromesso per la minima interferenza reciproca tra i vari strumenti ed una buona ergonomia di utilizzo (Fig. 3.3). Si è preferito posizionare lo shaker e gli strumenti di misura direttamente al suolo per minimizzare l'influsso di eventuali disturbi esterni (vibrazioni prodotte da terzi), mentre la parte di controllo ed acquisizione dati è stata posizionata sopra ad un tavolo per una migliore supervisione da parte dell'operatore seduto. I cablaggi tra le varie strumentazioni sono stati posizionati in maniera tale da minimizzare sia l'interferenza elettromagnetica reciproca, che nei confronti della rete elettrica di distribuzione in AC 230 V e frequenza 50 Hz. Per alcune apparecchiature, come ad esempio il condizionatore di segnale dell'accelerometro, si utilizzato una schermo elettromagnetico ausiliario funzionante secondo il principio della gabbia di Faraday, ovvero utilizzando dei contenitori e dei fogli in alluminio. Inoltre, non esistendo un sistema di disaccoppiamento dinamico tra lo shaker ed il suolo, e data la forte sensibilità della trave piezoelettrica alle vibrazioni, si è resa necessaria una valutazione dei disturbi esterni agenti sul sistema globale mediante una strumentazione ausiliaria (Fig. 3.16). Questo ha così permesso di pianificare le prove sperimentali quando tali disturbi influenzassero in maniera minima il sistema stesso.

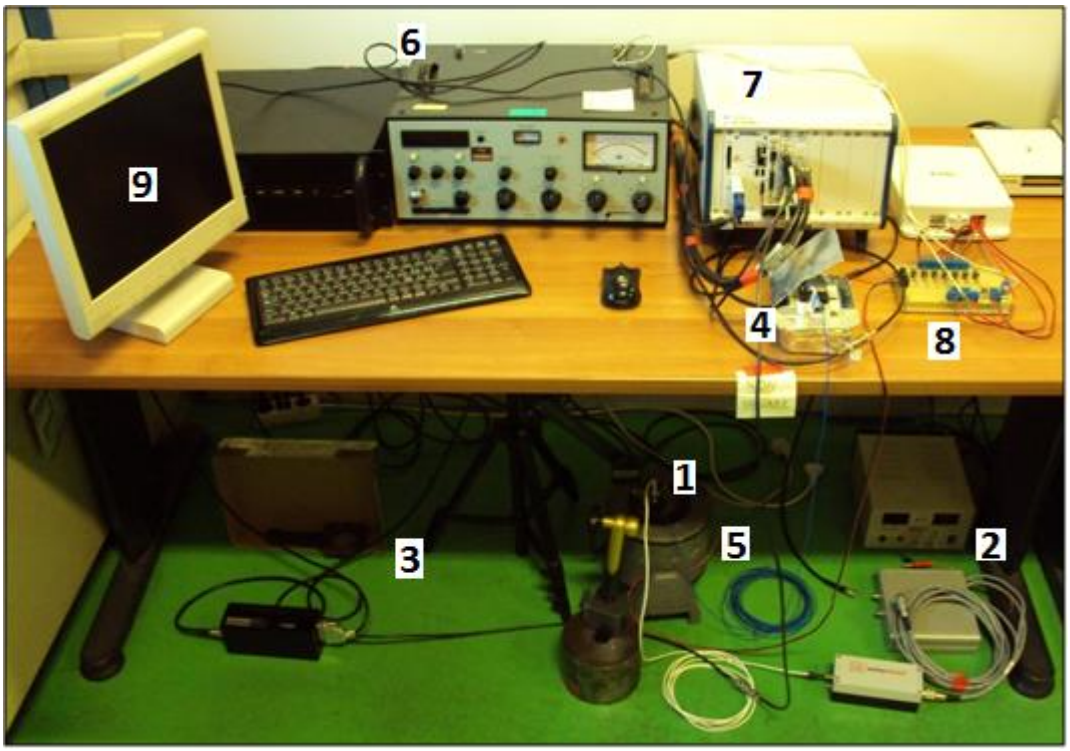

Fig. 3.3 *Sistema sperimentale d'insieme*

Nella fase di sperimentazione, sono stati utilizzati parametri costanti di riferimento (Tab. 3.1). Una generica prova ha previsto primariamente l'acquisizione dei quattro segnali da misurare per ciascun valore di resistenza elettrica, all'interno dell'intervallo di frequenza prestabilito. Terminata questa fase, si è proseguito con l'elaborazione dei dati con programma Matlab™ e costruzione dei grafici delle grandezze di interesse con programma Excel™.

Tab. 3.1 *Parametri generali di prova*

Accelerazione della base	280 [mm/s^2]
Intervallo di frequenza	46-60 [Hz]
Incremento frequenza	0,2 [Hz/s]
Massa d'estremità	7,46 [g]
Intervallo resistenze	4,6-775 [kΩ]

3.2.1 Sistema di afferraggio delle travi

Per poter fissare le travi allo shaker ed allocare in maniera agevole la strumentazione di misura, è stato progettato uno speciale sistema di afferraggio (Fig. 3.4) realizzato in acciaio strutturale scomponibile in due pezzi distinti. Esso è stato ottenuto mediante lavorazione con fresa manuale e trapano a colonna, seguendo i disegni costruttivi di Appendice B. La base inferiore viene fissata direttamente allo shaker tramite due viti a filettatura UNF 10-32 e presenta una scanalatura di supporto per la trave ed un foro maschiato per l'ancoraggio dell'accelerometro. Quello superiore invece, unito con due viti a testa esagonale M5, ha la sola funzione di elemento di bloccaggio della trave.

Le peculiarità di questo afferraggio comprendono:

- il rapido e preciso posizionamento della base della trave grazie alla scanalatura interna sagomata;
- coppia di serraggio delle viti del blocco superiore controllabili manualmente dall'operatore;
- la presenza di un foro passante M3 per il fissaggio dell'accelerometro.

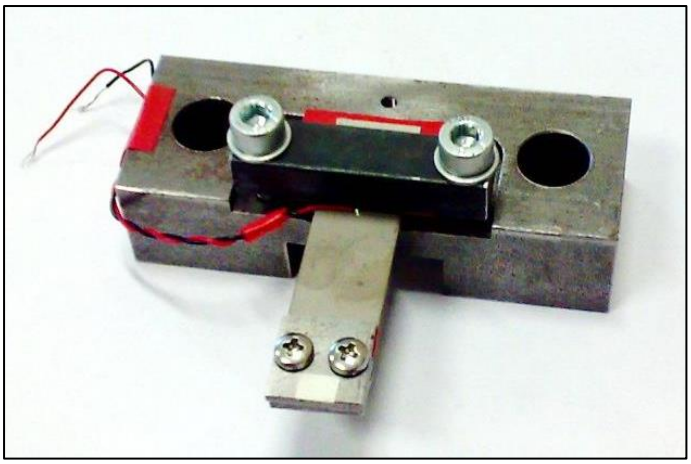

Fig. 3.4 *Sistema di afferraggio della trave piezoelettrica*

La trave è montata nell'afferraggio creando un isolamento elettrico con del nastro. Inoltre per ottenere una vibrazione delle travi di 50 Hz, si è usata una massa d'estremità in acciaio da 7,46 g, scomponibile in due pezzi ed unita con bulloni M3. Si faccia riferimento all'Appendice B per i disegni quotati di massa ed afferraggio.

3.2.2 Sistema di misura dello spostamento della base

Lo spostamento della base è stato rilevato tramite un sistema di misura a correnti indotte (Fig. 3.5) fornito dalla Micro-Epsilon tipo eddyNCDT-3010-S1-M-C3. La catena di misura comprende cinque costituenti principali:

1. sensore a correnti indotte modello S1-M;
2. braccio meccanico di sostegno del sensore;
3. condizionatore di segnale modello DT3010 e uscita a connettore DIN 47100;
4. dispositivo auto-costruito per estrarre il segnale tramite connettore BNC;
5. alimentatore stabilizzato modello PS3003L prodotto dalla HQ Power.

Tab. 3.2 *Caratteristiche tecniche eddyNCDT-3010-S1-M-C3*

Intervallo di misura sensore	1 [mm]
Risoluzione sensore	0,05 [μm]
Coefficiente di conversione	1 [V] = 0,946 [mm]
Tensione in uscita condizionatore	0-10 [V]
Alimentazione condizionatore	DC 24 [V]

Le caratteristiche della strumentazione di misura sono riassunte in (Tab. 3.2).
Il sensore a correnti indotte è stato fissato al braccio meccanico e posto in prossimità del sistema di afferraggio in acciaio della trave piezoelettrica. Inoltre è stata verificata la taratura facendo una misura di confronto di spostamento con il laser (Fig. 3.6). Lo spostamento verticale sinusoidale rilevato sulla base della trave ha un valore d'ampiezza nell'intorno dei 3 μm.

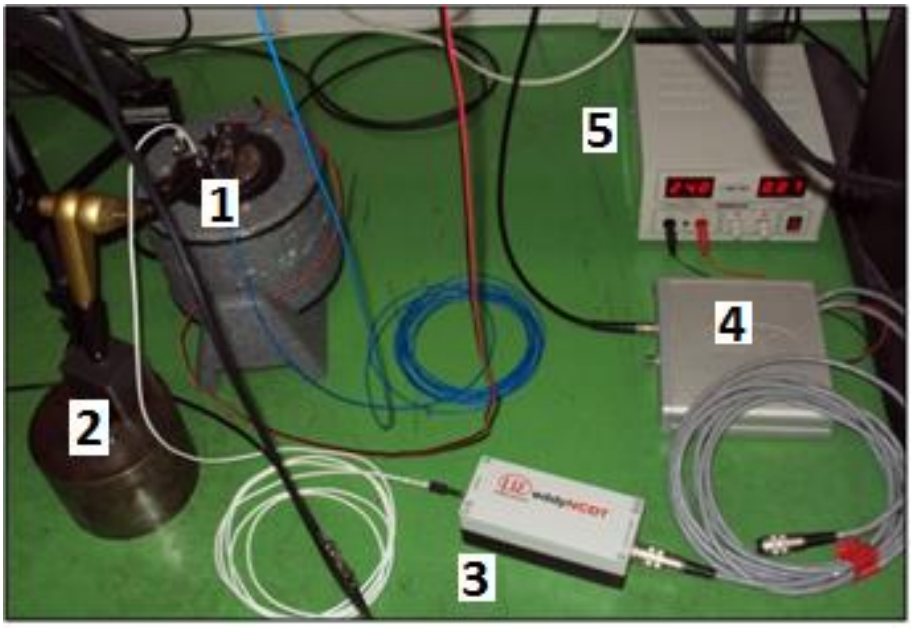

Fig. 3.5 *Sistema di misura dello spostamento della base con correnti indotte*

3.2.3 Sistema di misura dello spostamento dell'estremo libero

Lo spostamento dell'estremità è stato rilevato tramite un sistema di misura laser fornito dalla Micro-Epsilon tipo optoNCDT-LD-1605-2. La catena di misura comprende quattro costituenti principali:

1. sensore laser modello LD-1605-2;
2. treppiedi di sostegno del sensore;
3. condizionatore di segnale modello LD-1605;
4. alimentatore stabilizzato modello KAT5V prodotto dalla Kert.

Le caratteristiche della strumentazione di misura sono riassunte in (Tab. 3.3).

Tab. 3.3 *Caratteristiche tecniche optoNCDT-LD-1605-2*

Intervallo di misura laser	±1 [mm]
Risoluzione laser	0,5 [μm]
Coefficiente di conversione	1 [V] = 0,1 [mm]
Tensione in uscita condizionatore	0-10 [V]
Alimentazione condizionatore	DC 24 [V]

Il sensore laser è stato fissato ad un sostegno treppiede e posto in prossimità dell'estremità della trave piezoelettrica. L'ordine di grandezza dello spostamento totale verticale sinusoidale rilevato ha un valore d'ampiezza nell'intorno di 0,1 mm.

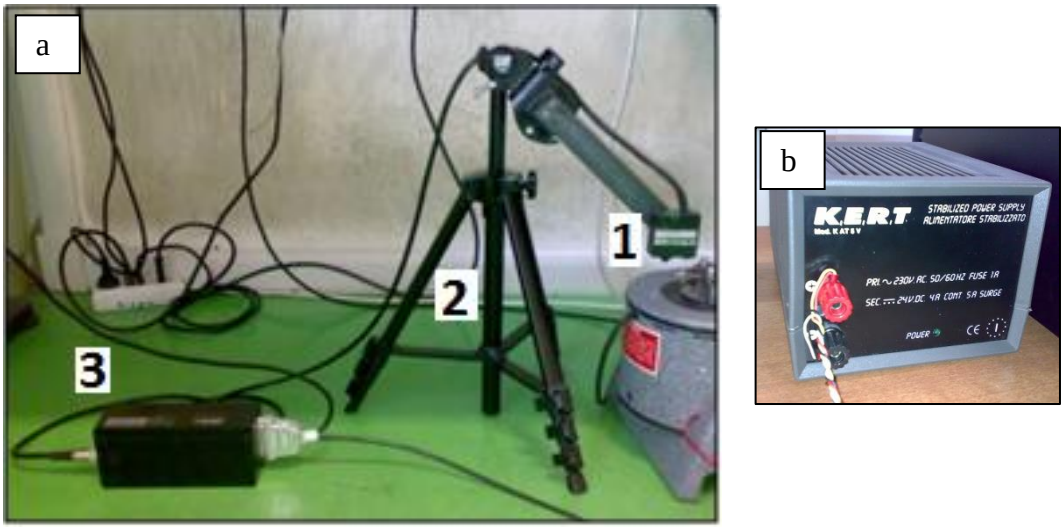

Fig. 3.6 *Sistema di misura dello spostamento dell'estremità: a) laser; b) alimentatore*

3.2.4 Sistema di misura dell'accelerazione della base

L'accelerazione della base è stata rilevata tramite un accelerometro (Fig. 3.7) fornito dalla PCB. La catena di misura comprende due costituenti principali:

1. accelerometro modello 355B04;
2. condizionatore di segnale a batteria modello 480E09.

Tab. 3.4 *Caratteristiche tecniche catena accelerometrica PCB*

Intervallo di misura accelerometro	±5g (picco)
Sensitività accelerometro	1063 [mV/g]
Guadagno in tensione del condizionatore	1-10-100
Alimentazione condizionatore	3 batterie da 9 [V]

Le caratteristiche della strumentazione di misura sono riassunte in (Tab. 3.4).
L'accelerometro è stato fissato direttamente alla base dell'afferraggio della trave piezoelettrica tramite una vite a filettatura metrica M3. L'accelerazione verticale sinusoidale rilevata sulla base della trave ha un valore d'ampiezza di 280 mm/s^2.

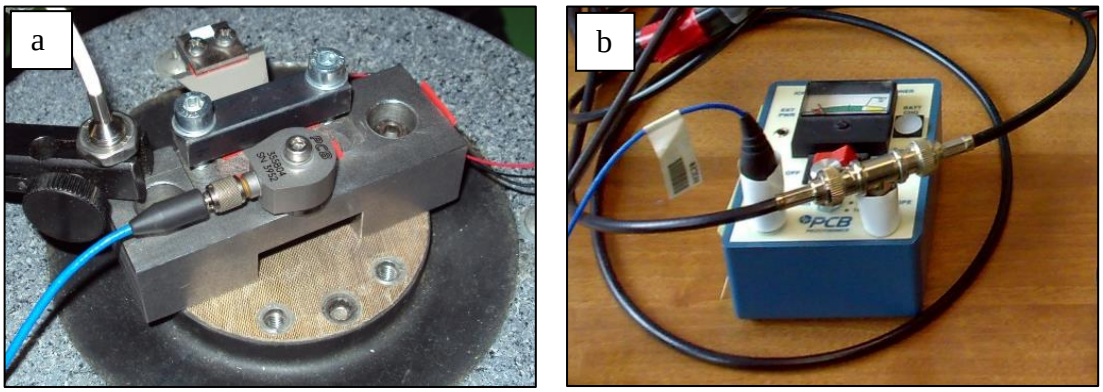

Fig. 3.7 *Sistema di misura dell'accelerazione della base:*
a) accelerometro fisso (con cavo di colore blu); b) condizionatore di segnale

3.2.5 Sistema di generazione delle vibrazioni

La generazione delle vibrazioni della base è realizzata con un sistema composto da due costituenti principali (Fig. 3.8):

1. shaker modello PM-25 prodotto dalla MB Dynamics;
2. amplificatore modello PPA-600 prodotto dalla Ortofon.

Tab. 3.5 *Caratteristiche tecniche dello shaker*

Forza di uscita max.	11,3 [kg]
Spostamento max.	12,7 [mm]
Accelerazione max.	50 g

Le caratteristiche della strumentazione di misura sono riassunte in (Tab. 3.5).
Lo shaker è stato posizionato direttamente al suolo, in modo tale da minimizzare vibrazioni esterne secondarie dovute ad esempio al suo posizionamento al di sopra di un tavolo. Il sistema di afferraggio della trave piezoelettrica è stato fissato allo shaker tramite due viti a filettatura americana UNF 10-32. Il segnale elettrico sinusoidale generato dal controllore analogico in retroazione viene inviato all'amplificatore che ha la funzione di alimentare lo shaker. Quest'ultimo di conseguenza eccita la base dell'afferraggio in direzione verticale con uno spostamento sinusoidale.

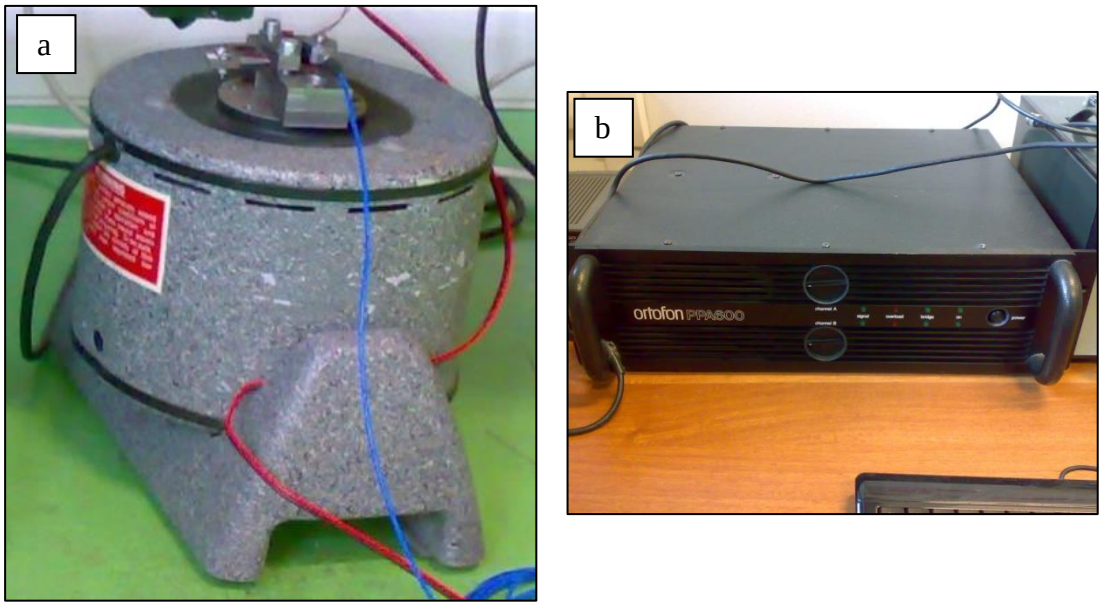

Fig. 3.8 *Sistema di generazione delle vibrazioni: a) shaker; b) amplificatore*

3.2.6 Sistema di controllo analogico in retroazione dell'accelerazione della base

Il sistema di controllo analogico in retroazione dell'accelerazione della base è composto da un controllore modello 1047 prodotto dalla Brüel & Kjær (Fig. 3.9).
Tale apparato mantiene ad un fissato valore di riferimento il segnale dell'accelerazione della base durante la variazione in frequenza nell'intervallo da 46 a 60 Hz; ovvero il segnale elettrico sinusoidale inviato all'amplificatore che guida lo shaker viene costantemente modificato in modulo. Le caratteristiche della strumentazione di misura sono riassunte in tabella (Tab. 3.6).

Tab. 3.6 *Caratteristiche tecniche del controllore analogico in retroazione*

Intervallo di frequenza	5-10000 [Hz]
Tensione in uscita	0-10 [V] Root Mean Square
Modo operativo	Manuale od automatico

Grazie al fatto che tale apparato è parzialmente controllabile in maniera automatica tramite porte esterne a connettore DIN, è stato possibile implementare sia il blocco di sicurezza che la capacità di generare la variazione in frequenza ascendente e discendente. Questo avviene direttamente dal programma Labview™ tramite il modulo esterno SCC-68, il quale comanda tre relè posti sul sistema automatico di variazione delle resistenze.

Fig. 3.9 *Sistema di controllo analogico in retroazione dell'accelerazione della base*

3.2.7 Sistema di acquisizione dati e controllo digitale

Il sistema di acquisizione dati e di controllo digitale è costituito da una strumentazione prodotta dalla National Instruments (Fig. 3.10). Esso risulta composto da elaboratore sistemato in un contenitore, nel quale sono inserite due schede interne di cui una collegata ad un modulo esterno:

1. contenitore metallico PXI-1042Q;
2. elaboratore PXI-8106;
3. scheda degli ingressi analogici PXI-4462;
4. scheda di controllo digitale PXI-6259;
5. modulo esterno SCC-68 collegato alla scheda di controllo digitale.

Tab. 3.7 *Caratteristiche tecniche del sistema di acquisizione dati digitale*

Risoluzione PXI-4462	24 bits
Campionamento PXI-4462	204,8 [kS/s]
Accoppiamento in ingresso PXI-4462	AC o DC
Tensione in uscita digitale PXI-6259	0-5 [V]

Le caratteristiche della strumentazione di misura sono riassunte in tabella (Tab. 3.7). Questo sistema ha il compito di acquisire mediante campionamento digitale (con frequenza di campionamento di 4000 Hz) i quattro segnali analogici provenienti dal piezoelettrico, dal sensore a correnti indotte, dal laser e dall'accelerometro. Tramite il programma Labview™ installato si ha la gestione dell'interfaccia grafica. Il modulo esterno SCC-68, con porte digitali da 0-5 V, ha il compito di controllare i relè facenti parte del sistema automatico di variazione delle resistenze.

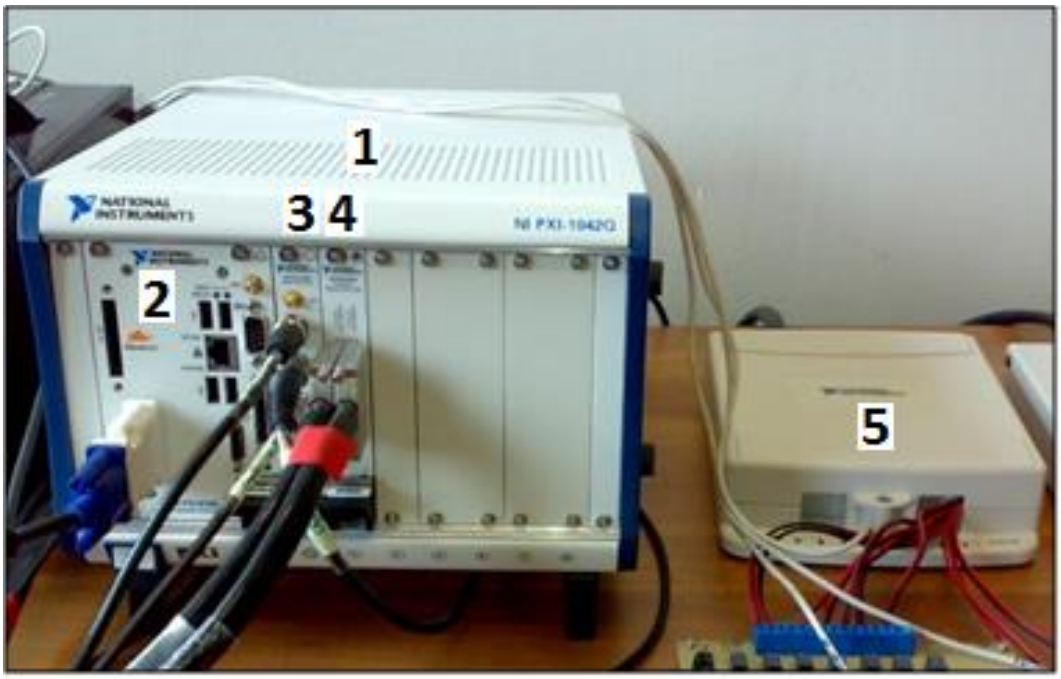

Fig. 3.10 *Sistema di acquisizione dei dati e di controllo digitale*

3.2.8 Sistema di variazione automatica delle resistenze

Per la caratterizzazione elettromeccanica delle travi è stato necessario effettuare delle misurazioni di tensione ai capi di resistenze collegate a valle del trasduttore piezoelettrico. L'utilizzo di un semplice carico resistivo, invece di un circuito complesso, sta nel fatto che si vuole migliorare la prestazione della trave solamente da un punto di vista meccanico. Per ottenere un numero sufficiente di punti tali da poter tracciare una buona curva di caratterizzazione, si è optato per l'utilizzo di trenta valori di resistenza distribuiti su di un intervallo compreso tra 4,6 e 775 kΩ. Vista la durata non trascurabile di ogni singola misurazione, si è costruito un apparato costituito da un insieme di resistenze (Fig. 3.12), che potesse venire comandato automaticamente dal controllore digitale mediante il programma Labview™. Il sistema di comando avviene tramite la scheda PXI-6259 collegata esternamente al modulo SCC-68 sulle porte digitali DC 0-5 V. Il controllo in automatico delle resistenze ha la funzione di aprire e chiudere i relè, seguendo una sequenza preimpostata, in maniera tale da combinare la serie di resistenze. Infatti, la chiusura di un singolo relè va a cortocircuitare la sua resistenza, in maniera tale che essa non partecipa più al circuito elettrico. Per ottenere delle curve di caratterizzazione elettromeccanica ben definite, sono stati predisposti trenta valori di resistenza, vedi (Tab. 3.8). Per fare ciò, si è scelto di utilizzare sette resistenze singole di base (4,6-9,8-21,5-38,3-96,8-219,6-386 kΩ) sfruttando poi la possibilità di effettuare ulteriori collegamenti in serie. Ad esempio, un generico valore della serie, è ottenuto con arrotondamento della misura con: 74,1 = 38,3 + 21,5 + 9,8 + 4,6.

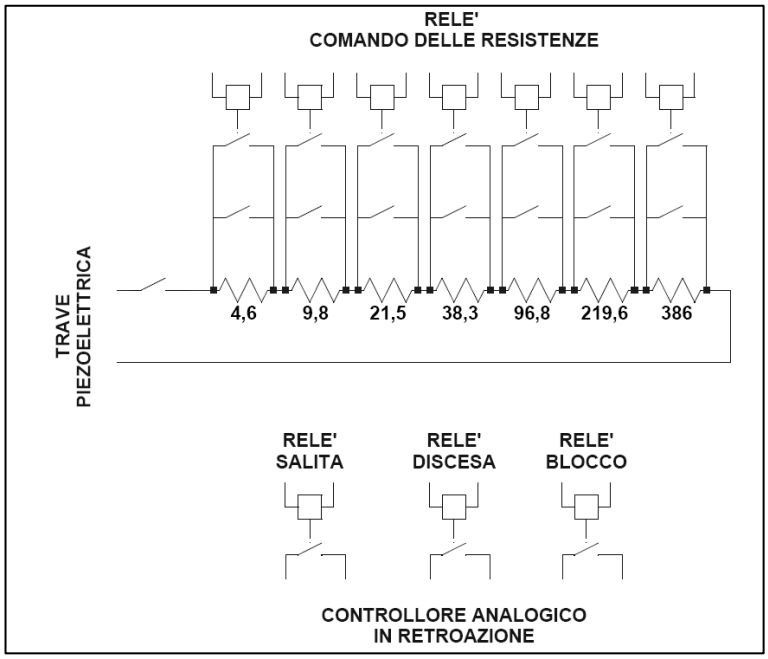

Fig. 3.11 *Schema elettrico del sistema di variazione automatica delle resistenze mostrato in (*Fig. 3.12*).*

Nella costruzione dell'apparato tutte le sette resistenze sono state collegate in serie, ed ai capi di ognuna di esse sono stati inseriti due interruttori in parallelo aventi funzione di cortocircuitare la resistenza. Di essi, uno manuale e l'altro per il funzionamento in automatico con relè modello EV1N (DC 5 V) prodotto dalla IMO.

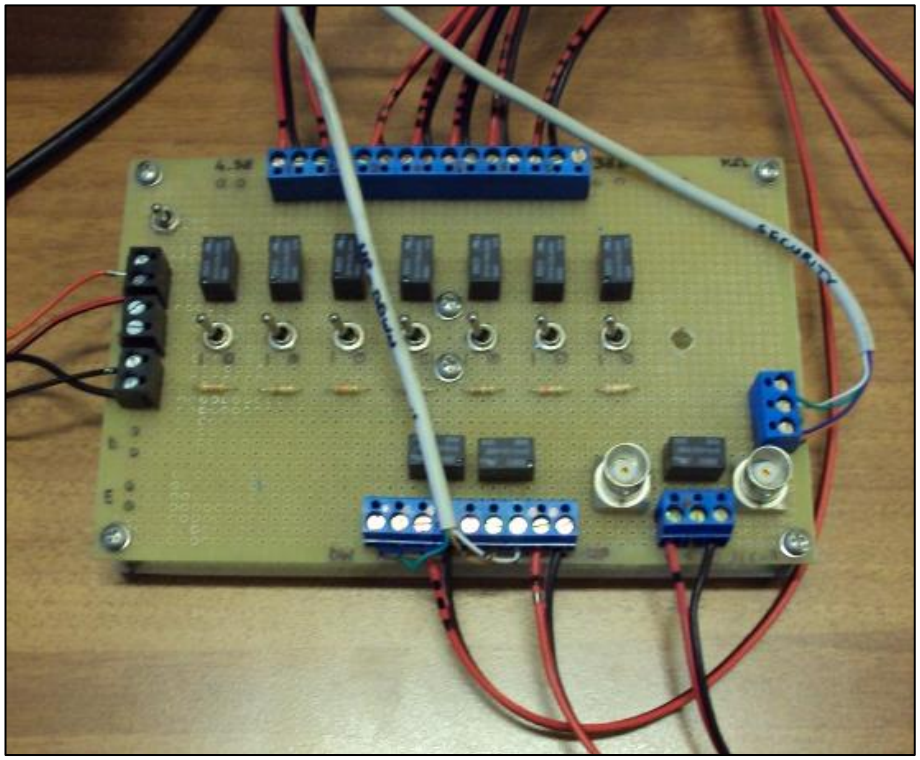

Fig. 3.12 *Sistema di variazione automatica delle resistenze*

Tab. 3.8 *Valori in [kΩ] delle resistenze utilizzate*

0	**4,6**	**9,8**	14,4	**21,5**	26,1
31,3	**38,3**	42,9	48	52,6	59,7
64,3	74,1	**96,8**	122,9	156,7	171,1
219,6	272,4	316,7	352	**386**	446
504	557	605	657	711	775

Inoltre sullo stesso dispositivo sono stati installati altri tre relè simili. Uno di essi ha la funzione di blocco di sicurezza del sistema per evitare i danni dovuti ad instabilità del controllore. Per cui quando la tensione di uno o più segnali in ingresso provenienti dal piezoelettrico, dal sensore a correnti indotte, dal laser e dall'accelerometro supera un certo valore di soglia, il controllore analogico viene messo in pausa e la catena di misurazione si blocca. Gli altri due relè invece hanno la funzione di invertire la direzione di variazione della frequenza per il controllo in automatico, uno d'incremento e l'altro di decremento.

3.2.9 Sistema di visualizzazione in tempo reale dei segnali campionati e di controllo di sicurezza

Mediante l'utilizzo del programma Labview™, si è costruito uno schema di flusso (Fig. 3.14) per gestire in automatico il controllore digitale della National Instruments e permettere di effettuare per ogni trave tutto il ciclo di prove alle varie resistenze. Il programma implementato, schematizzato mediante dei blocchi (Fig. 3.13), utilizza la scheda PXI-4462 per acquisire i segnali di tensione in ingresso, per visualizzarli all'operatore e salvarli in memoria. In parallelo la scheda PXI-6259 controlla, tramite il modulo esterno SCC-68, i vari relè posizionati sul sistema di variazione automatico delle resistenze, dell'innesco del blocco di sicurezza e per l'inversione della direzione di variazione della frequenza.

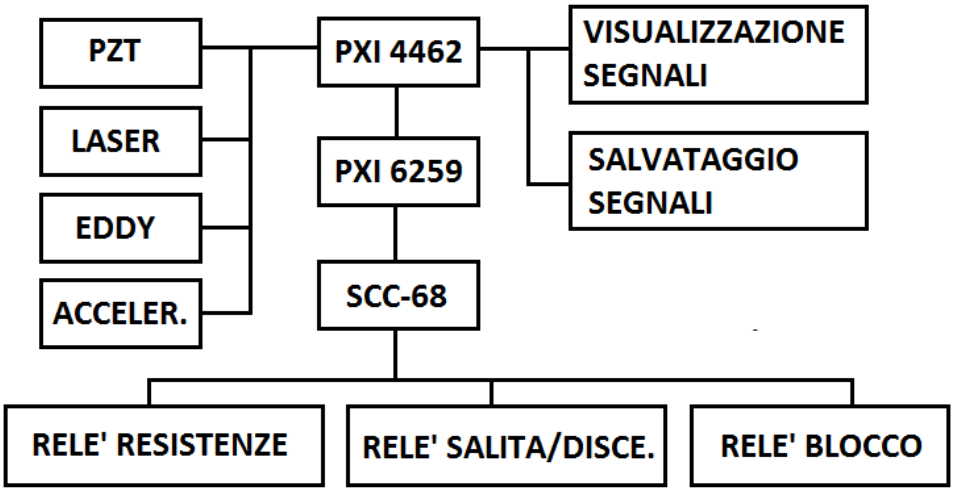

Fig. 3.13 *Schema a blocchi del controllore digitale*

Il programma permette di creare un insieme di sequenze di comandi visualizzabili come dei blocchetti, i quali vengono interconnessi tra loro tramite dei collegamenti, simili ad un cablaggio. Ognuna di queste connessioni è un passaggio di dati tra un blocchetto e l'altro, dove il colore del filo identifica una certa tipologia di dato. In una struttura più complessa, vengono inoltre utilizzati dei riquadri con la funzione di cicli, dove al loro interno possono essere inseriti vari blocchetti. Quando richiesto sono anche inseriti sia gli operatori logici che quelli matematici.

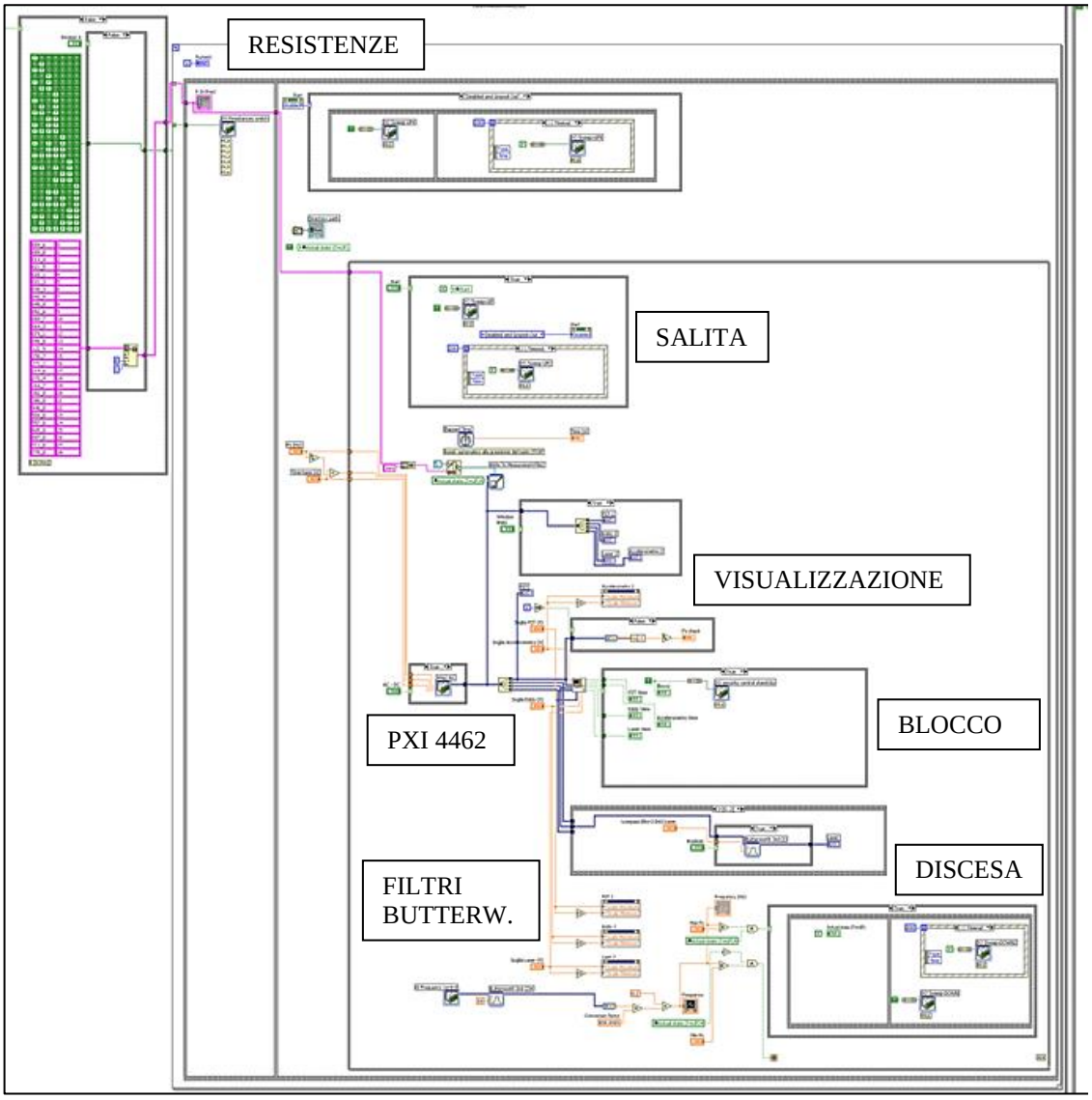

Fig. 3.14 *Schema del controllore con il programma Labview™*

Per mezzo del programma Labview™, è stata inoltre creata un'interfaccia utente grafica (Fig. 3.15) che permette sia di visualizzare i singoli segnali campionati in ingresso, che di poter gestire i comandi per il blocco di sicurezza del sistema. Questa interfaccia permette di visualizzare in tempo reale i segnali di tensione forniti dal piezoelettrico, dal sensore a correnti indotte, dal laser e dall'accelerometro. Inoltre visualizza la frequenza istantanea di eccitazione della base della trave bimorfa ed il suo andamento nel tempo, oltre che il valore della resistenza utilizzata. Alcuni

parametri, quali l'intervallo di frequenza od i limiti di intervento del blocco di sicurezza, sono direttamente modificabili dall'operatore. Inoltre e stato applicato un filtro digitale passabasso di Butterworth dei segnali in ingresso, disattivabile all'occorrenza, per visualizzare meglio l'andamento dei segnali acquisiti.

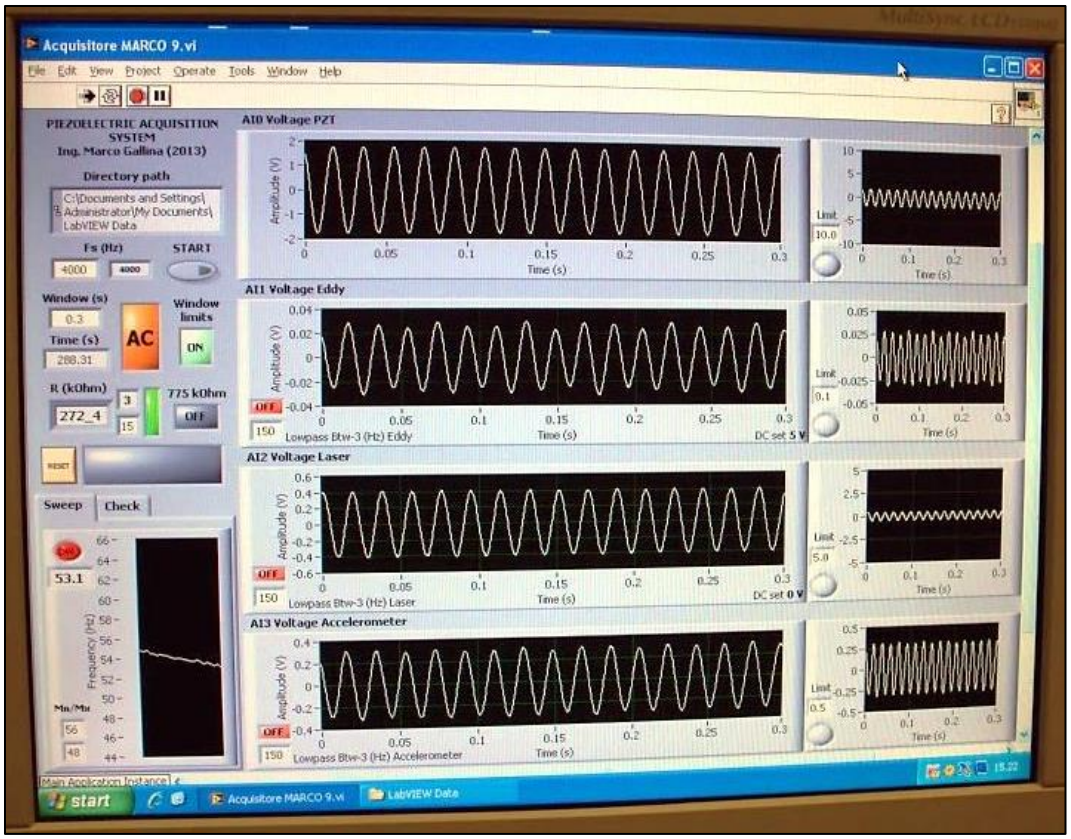

Fig. 3.15 *Interfaccia per la visualizzazione in tempo reale dei segnali acquisiti*

3.2.10 Sistema ausiliario di individuazione dei disturbi

La presenza di disturbi esterni è stata rilevata tramite un sistema di misura (Fig. 3.16) costituito da un accelerometro sismico collegato ad una scheda di acquisizione dati comunicante con un elaboratore portatile. Le caratteristiche della strumentazione di misura sono riassunte in (Tab. 3.9). In particolare, il sistema è composto da:

1. accelerometro con basetta magnetica modello 393B12 prodotto dalla PCB;
2. condizionatore di segnale a batteria modello 480E09 prodotto dalla PCB;
3. scheda di acquisizione dati ad ingresso analogico modello 9234 USB prodotta dalla National Instruments;
4. elaboratore portatile con installato il programma Matlab™.

Tab. 3.9 *Caratteristiche del sistema ausiliario di individuazione dei disturbi*

Risoluzione 9234 USB	24 bits
Campionamento 9234 USB	51,2 [kS/s]
Accoppiamento in ingresso 9234 USB	AC o DC
Tensione in ingresso 9234 USB	0-5 [V]
Intervallo di misura accelerometro	±0,5g (picco)
Sensitività accelerometro	10368 [mV/g]

La valutazione del disturbo si è resa necessaria dal fatto che, durante alcune prove, si era verificata un'instabilità del sistema di controllo analogico in retroazione con conseguente blocco del sistema di sicurezza. Quindi in ausilio al sistema di prova sperimentale globale, è stato introdotto un ulteriore sistema secondario con il compito di stimare la presenza di eventuali disturbi trasmessi dal suolo.

Fig. 3.16 *Sistema ausiliario di individuazione dei disturbi:*
a) PC e scheda di acquisizione (vedi freccia); b) accelerometro sismico

Il disturbo rilevato direttamente al suolo mediante un accelerometro sismico è stato valutato con riferimento al suo spettro in frequenza (Fig. 3.17). Si è notato che la sua frequenza fondamentale, sempre presente per gran parte della giornata, era di modulo pressoché costante e fissa a 33 Hz. Il contributo della restante parte dello spettro poteva invece essere ritenuto trascurabile ai fini dell'interferenza con le prove.

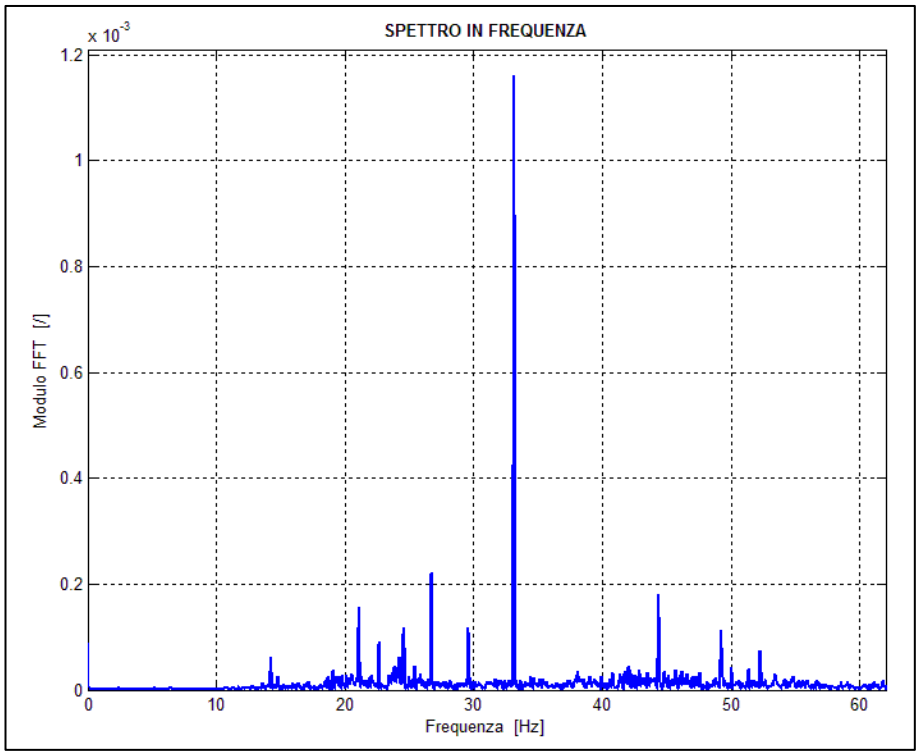

Fig. 3.17 *Spettro in frequenza del modulo del disturbo (33Hz)*

Successivamente, dal segnale acquisito dall'accelerometro fisso posto sull'afferraggio della trave e dopo l'applicazione della trasformata di Fourier, si è confrontato il modulo dell' accelerazione dovuta al disturbo con quello dell'accelerazione imposta (Fig. 3.18).
Nel peggiore dei casi rilevati, si è raggiunto un rapporto segnale/rumore di valore pari a 15:1, il quale tendeva a generare l'instabilità del controllo in retroazione del sistema, causando un continuo intervento del blocco di sicurezza. Questo si spiega considerando che la frequenza del disturbo (33 Hz) è molto vicina alla frequenza di lavoro (46-60 Hz), e si viene quindi a generare un battimento per sovrapposizione delle due onde sinusoidali. In questa condizione, la capacità del controllore non era sufficiente a garantire la stabilità del controllo in retroazione.

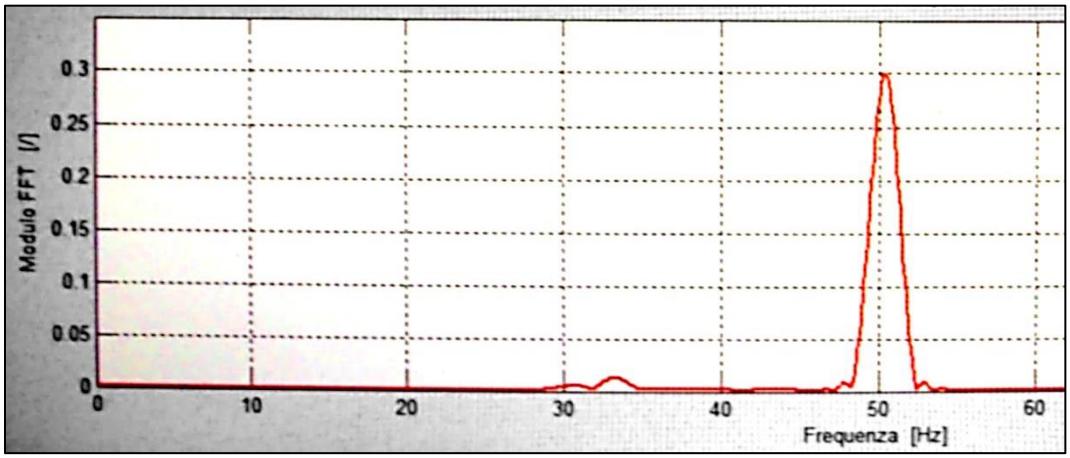

Fig. 3.18 *Trasformata di Fourier del modulo del disturbo (33 Hz) e del segnale dell'accelerometro (in questo istante a 50 Hz)*

Per ovviare alla presenza di tale disturbo, il quale è risultato di natura non nota e comunque difficilmente attenuabile, si è deciso di eseguire le prove sperimentali nelle ore serali, quando esso presentava il suo modulo minimo (con rapporto segnale rumore molto superiore a 15:1).

3.3 Elaborazione numerica dei segnali

Successivamente alla fase di acquisizione dei quattro segnali in ingresso (piezoelettrico, sensore a correnti indotte, laser ed accelerometro) è stata eseguita al calcolatore l'elaborazione numerica tramite programma Matlab™ (Fig. 3.19). I punti di massimo delle curve del voltaggio e dello spostamento d'estremità rappresentano la condizione di risonanza meccanica della trave [22]. Si ricorda che le curve sono composte da segnali sinusoidali, che a causa della scala dei tempi mostrata in secondi, appaiono come delle regioni uniformi. Come chiarimento, si faccia riferimento alla (Fig. 3.15). Per cui, anche se non visibile in (Fig. 3.19), i segnali presentano una frequenza crescente all'aumentare del tempo (di 0,2 Hz/s e ascendente nell'intervallo 46-60 Hz).
Dalle curve si nota che l'andamento del segnale dell'accelerazione *a(t)* rimane pressoché costante nel tempo, questo grazie all'azione del controllore analogico. Inoltre lo spostamento della base *v(t)* diminuisce nel tempo con andamento parabolico, in quanto la direzione di percorrenza dell'intervallo di frequenza *f(t)*

risulta ascendente. Per un segnale sinusoidale, questo andamento si può dedurre dalla formula analitica (3.1).

$$v(t) = \frac{a(t)}{(2 \cdot \pi \cdot f(t))^2} \tag{3.1}$$

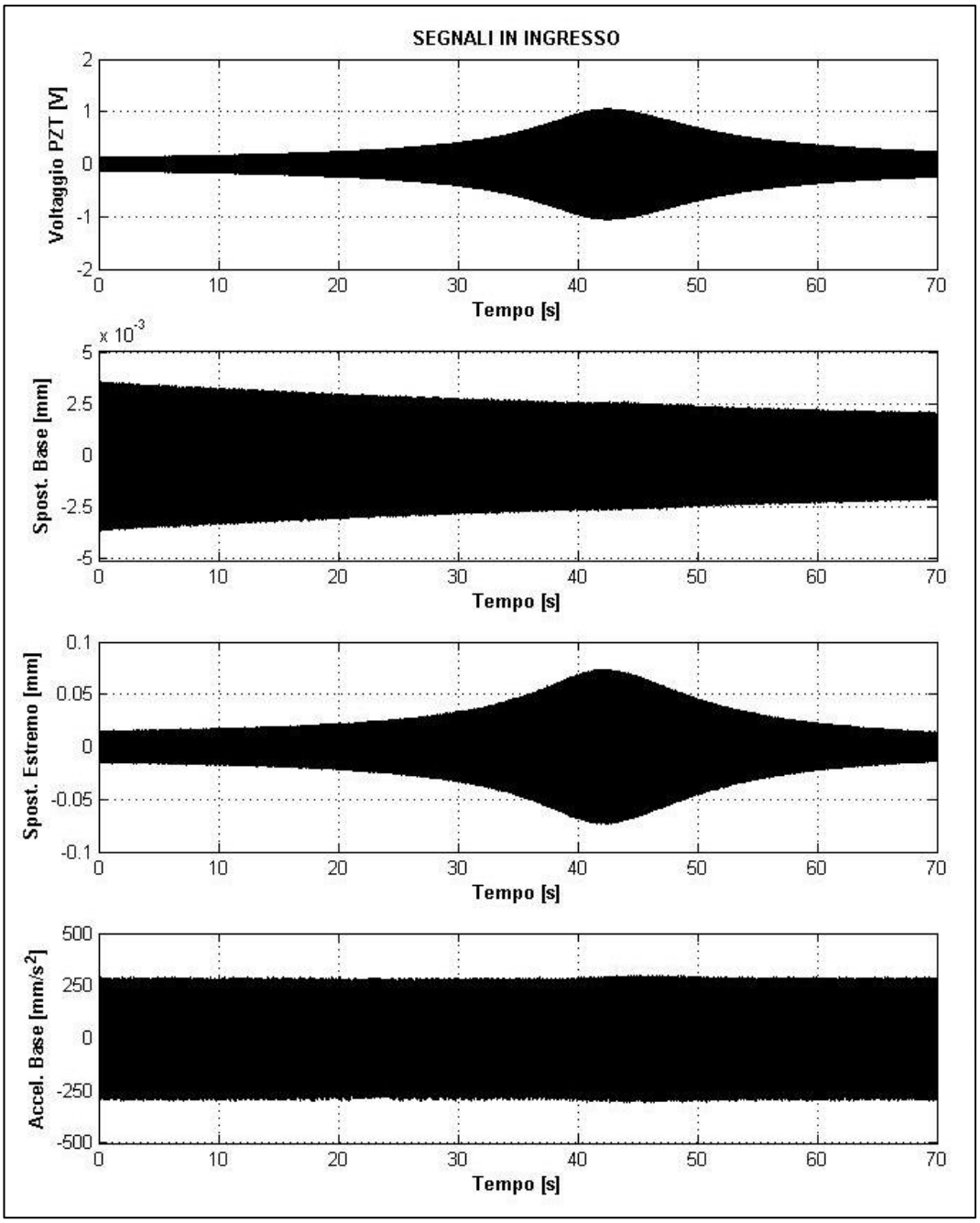

Fig. 3.19 *Esempio dei segnali acquisiti per la trave trapezoidale diretta con resistenza applicata di 38,3 kΩ*

Il primo passo dell'elaborazione numerica dei segnali è stato quello di determinarne lo spettro in frequenza tramite l'uso della trasformata di Fourier. Di seguito è stata calcolata la funzione di trasferimento di alcune grandezze, in particolare il rapporto

tra spostamento dell'estremo e lo spostamento della base. A questo punto è stato possibile visualizzare l'andamento di modulo e fase della risposta in frequenza del sistema meccanico della trave a sbalzo per ogni resistenza elettrica applicata.

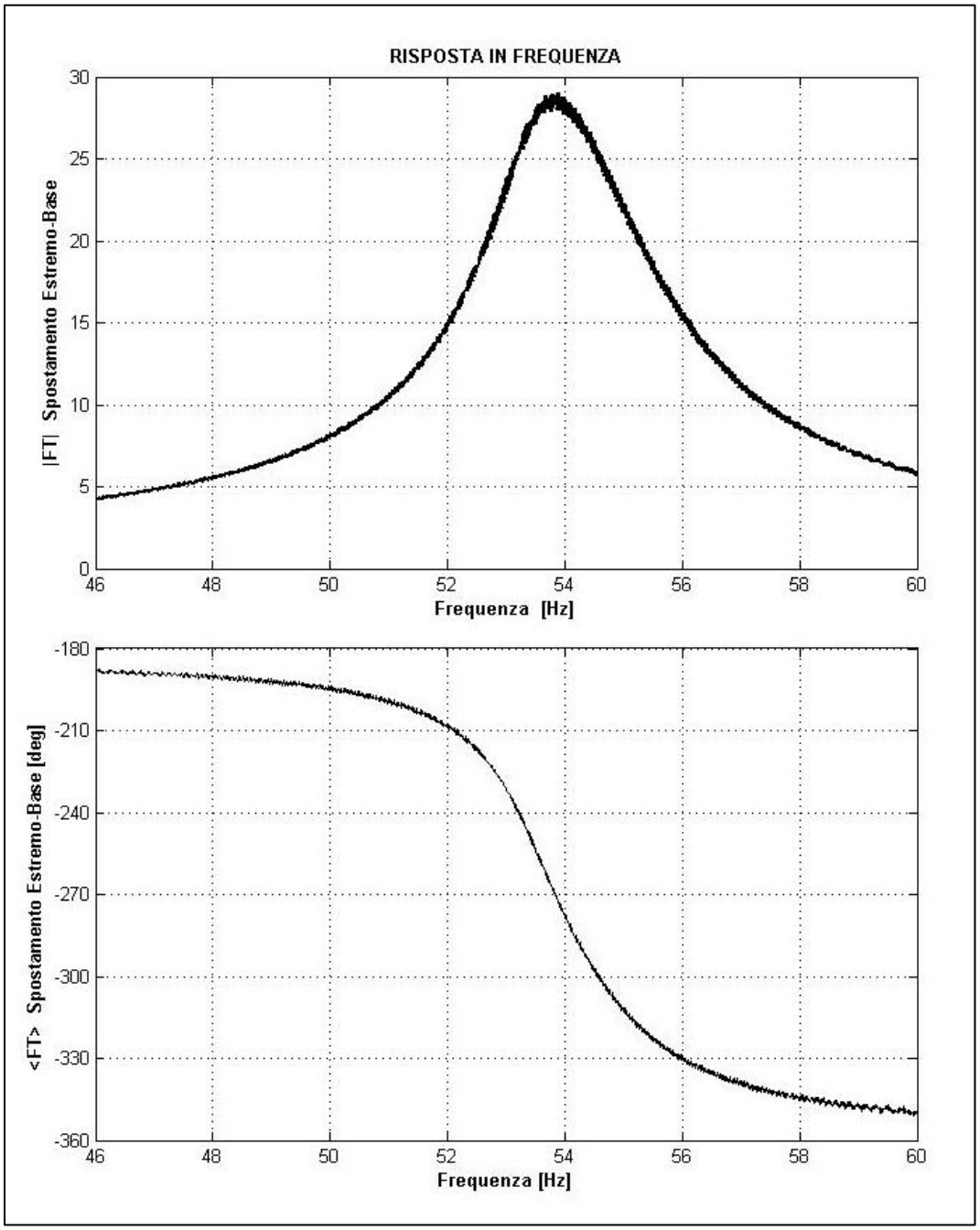

Fig. 3.20 *Esempio di modulo e fase della funzione di risposta in frequenza per la trave trapezoidale diretta con resistenza di 38,3 kΩ e frequenza di risonanza di 53,8 Hz*

Dalla curva del modulo si può determinare sia il suo valore di picco $|FT|_{max}$ che la corrispondente frequenza di risonanza $f_{r\ |FT|}$. Dalla curva della fase invece è visibile solamente la frequenza di risonanza $f_{r\ <FT>}$, la quale corrisponde al valore di frequenza a -270°. Per una migliore precisione di lettura del valore della frequenza di risonanza, si è preso come riferimento il suo valore ottenuto dalla curva della fase.

Una volta conclusa l'elaborazione numerica dei segnali in ingresso, è possibile determinare i valori di grandezze caratteristiche per ogni trave sperimentata ad una data resistenza (Tab. 3.10), ovvero: voltaggio massimo u_{max} generato dal piezoelettrico, spostamento massimo ν_{max} dell'estremità alla risonanza, valore massimo del modulo della funzione di trasferimento dello spostamento estremità-base $|FT|_{max}$ e frequenza di risonanza $f_{r\ <FT>}$, potenza elettrica P_{max} e potenza elettrica specifica volumica P_{Smax} massime generate. Per quanto riguarda il calcolo della potenza elettrica generata sulla resistenza R, si utilizza l'equazione (2.3) già presentata al capitolo precedente.

Tab. 3.10 *Esempio di valori sperimentali per la trave trapezoidale diretta*

Dati	Valori sperimentali				Valori calcolati	
R [Ω]	u_{max} [V]	ν_{max} [mm]	$\|FT\|_{max}$	$f_{r\ <FT>}$ [Hz]	P_{max} [μW]	$P_{S\ max}$ [μW/mm^3]
0	0,00	*nd*	*nd*	*nd*	0,00	0,0000
4600	0,24	0,131	48,06	53,31	6,16	0,0440
9800	0,45	0,117	44,64	53,40	10,37	0,0741
14400	0,60	0,107	41,16	53,47	12,52	0,0894
21500	0,78	0,095	36,55	53,57	14,21	0,1015
26100	0,87	0,088	34,22	53,64	14,51	0,1036
31300	0,96	0,081	31,93	53,74	14,63	0,1045
38300	1,05	0,074	29,00	53,83	14,43	0,1031
42900	1,10	0,070	27,50	53,91	14,12	0,1009
48000	1,15	0,066	26,04	53,95	13,80	0,0985
52600	1,19	0,062	24,77	54,02	13,43	0,0959
59700	1,24	0,058	23,26	54,13	12,92	0,0923
64300	1,27	0,056	22,36	54,18	12,60	0,0899
74100	1,33	0,052	20,92	54,31	11,90	0,0850
96800	1,45	0,045	18,17	54,70	10,87	0,0776
122900	1,52	0,040	16,64	55,02	9,39	0,0670
156700	1,64	0,036	15,34	55,43	8,57	0,0612
171100	1,69	0,036	15,09	55,57	8,31	0,0593
219600	1,85	0,034	14,63	56,05	7,78	0,0556
272400	2,02	0,034	14,65	56,44	7,45	0,0532
316700	2,15	0,034	14,96	56,69	7,30	0,0521
352000	2,26	0,035	15,29	56,86	7,28	0,0520
386000	2,36	0,035	15,73	57,00	7,23	0,0516
446000	2,52	0,036	16,21	57,17	7,12	0,0508
504000	2,67	0,038	16,87	57,32	7,05	0,0503
557000	2,78	0,038	17,43	57,39	6,96	0,0497
605000	2,89	0,040	17,89	57,46	6,91	0,0493
657000	2,99	0,041	18,41	57,56	6,81	0,0486
711000	3,09	0,041	18,90	57,62	6,72	0,0480
775000	3,21	0,042	19,47	57,65	6,63	0,0473

Dai risultati ottenuti in (Tab. 3.10), con l'utilizzo del programma Excel™, risulta possibile visualizzare graficamente l'andamento delle curve delle grandezze di riferimento per la caratterizzazione elettromeccanica della trave in funzione della resistenza applicata. I grafici ottenuti, sono raffigurati nel paragrafo seguente.

3.4 Confronto tra le curve di caratterizzazione al variare della resistenza applicata

Mediante la caratterizzazione elettromeccanica sperimentale per ciascuna tipologia di trave, è stato successivamente possibile fare un confronto per stabilire quale geometria fornisse la migliore prestazione in termini di potenza elettrica generata. Di seguito vengono raffigurati una serie di diagrammi che confrontano le curve di tutte le grandezze di riferimento per la caratterizzazione elettromeccanica delle travi al variare della resistenza elettrica applicata. In particolare:

- voltaggio generato dal piezoelettrico;
- modulo della funzione di trasferimento dello spostamento estremo-base;
- frequenza di risonanza;
- potenza elettrica generata;
- potenza elettrica specifica volumica generata.

I valori sono stati ottenuti per un'accelerazione costante della base, pari a 280 mm/s^2.

3.4.1 Andamento del voltaggio

Dalle curve dell'andamento del voltaggio u_{max} al variare della resistenza elettrica applicata (Fig. 3.21), si può notare un andamento parabolico caratteristico per tutte le tipologie di travi. Alle basse resistenze, le curve delle travi trapezoidali dirette sia a pari volume che ingombro tendono ad essere più accentuate nella curvatura rispetto alla trave rettangolare. Per valori di resistenza tendenti a zero, il voltaggio tende anch'esso a zero, perché il sistema si porta verso una condizione di circuito chiuso. Mentre alle alte resistenze, i valori asintotici del voltaggio, nell'intorno dei 3 V, si discostano tra loro del 15%.

3.4.2 Andamento del modulo della funzione di trasferimento spostamento estremo-base

Dalla curva dell'andamento del modulo della funzione di trasferimento spostamento estremità-base $|FT|_{max}$ al variare della resistenza elettrica applicata (Fig. 3.22), si può notare un andamento con presenza di un minimo relativo caratteristico per tutte le tipologie di travi. In questo caso alle basse resistenze, le curve presentano dei valori di picco nell'intorno di 40 con scostamento tra gli estremi del 27%, il più alto per la trave trapezoidale diretta a pari volume ed il più basso per la rettangolare. Inoltre, nell'intervallo di resistenza da 100 a 200 kΩ, la curva della trave trapezoidale diretta a pari volume appare più accentuata nella curvatura rispetto alla trave rettangolare. Mentre alle alte resistenze i valori asintotici del modulo, nell'intorno di 20, si discostano tra loro del 33%.

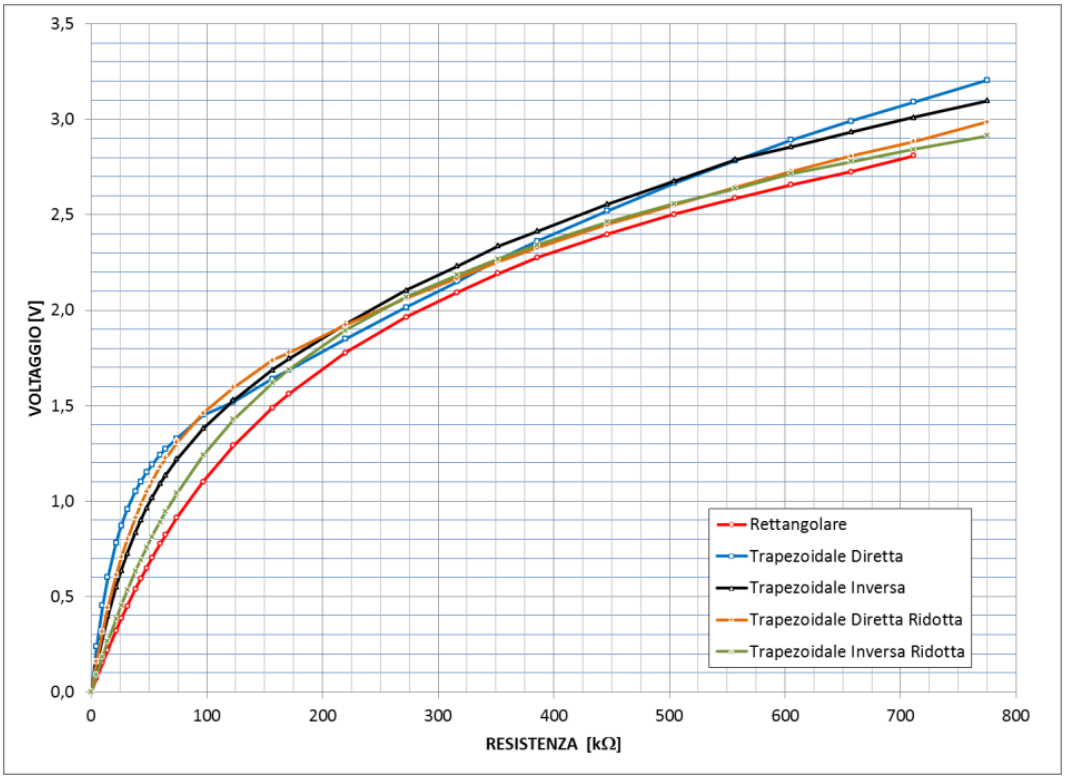

Fig. 3.21 *Confronto tra le curve sperimentali di voltaggio delle travi al variare della resistenza elettrica applicata*

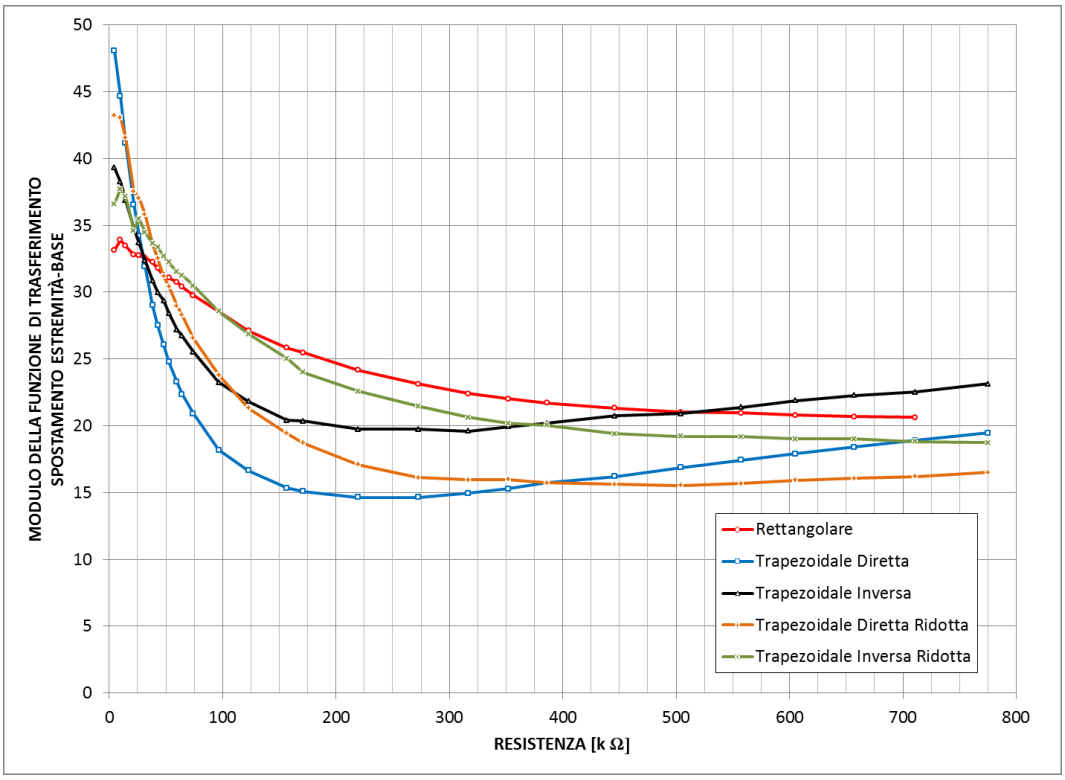

Fig. 3.22 *Confronto tra le curve sperimentali dei moduli della FT estremo-base delle travi al variare della resistenza elettrica applicata*

3.4.3 Andamento della frequenza di risonanza

Dalla curva dell'andamento della frequenza di risonanza $f_{r\ <FT>}$ al variare della resistenza elettrica applicata (Fig. 3.23), si può notare un andamento caratteristico crescente non lineare simile per tutte le tipologie di travi. Alle basse resistenze il valore di frequenza di risonanza risulta nell'intorno dei 51,5 Hz, con il minimo a 50 Hz per la trave trapezoidale inversa a pari ingombro ed il massimo a 53 Hz per la trave trapezoidale diretta a pari volume. Considerati gli andamenti simili delle curve, alle alte resistenze si ottiene un valore minimo di circa 52 Hz per la trave trapezoidale inversa a pari ingombro con incremento del 3,7% ed il massimo di quasi 58 Hz per la trave trapezoidale diretta a pari volume con incremento del 7,5%. La curvatura di quest'ultima risulta la più pronunciata. Si osserva un incremento della frequenza di risonanza all'aumentare della resistenza elettrica. Infatti, nella condizione di circuito aperto il materiale piezoelettrico diventa più rigido. Questo deriva dall'accumularsi delle cariche elettriche all'interno del materiale piezoelettrico, le quali generano un vincolamento elettromeccanico.

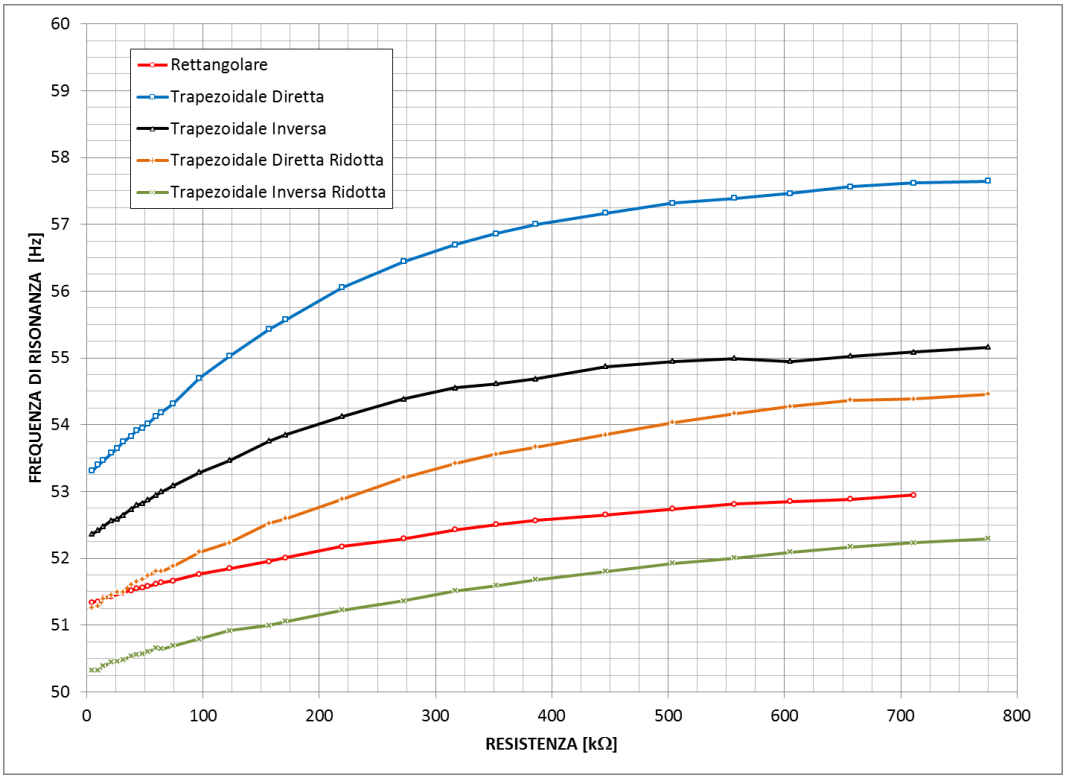

Fig. 3.23 *Confronto tra le curve sperimentali della frequenza di risonanza delle travi al variare della resistenza elettrica applicata*

3.4.4 Andamento della potenza

Dalla curva dell'andamento della potenza elettrica P_{max} al variare della resistenza elettrica applicata (Fig. 3.24), si può notare un picco alle basse resistenze con un successivo graduale decremento fino a tendere per le alte resistenze ad un valore asintotico quasi dimezzato. Il picco massimo con una curvatura molto accentuata e di quasi 15 μW è rappresentato dalla trave trapezoidale diretta a pari volume, mentre quello minimo di 7 μW è generato dalla trave rettangolare con curvatura molto

minore. Il valore asintotico pari a circa 6 μW è raggiunto in maniera simile da tutte le tipologie di travi con uno scarto totale del 28%. Si osserva che il valore della resistenza associata al picco è molto inferiore per la trave trapezoidale diretta a pari volume (circa 30 kΩ) che rispetto a quella rettangolare (circa 200 kΩ).

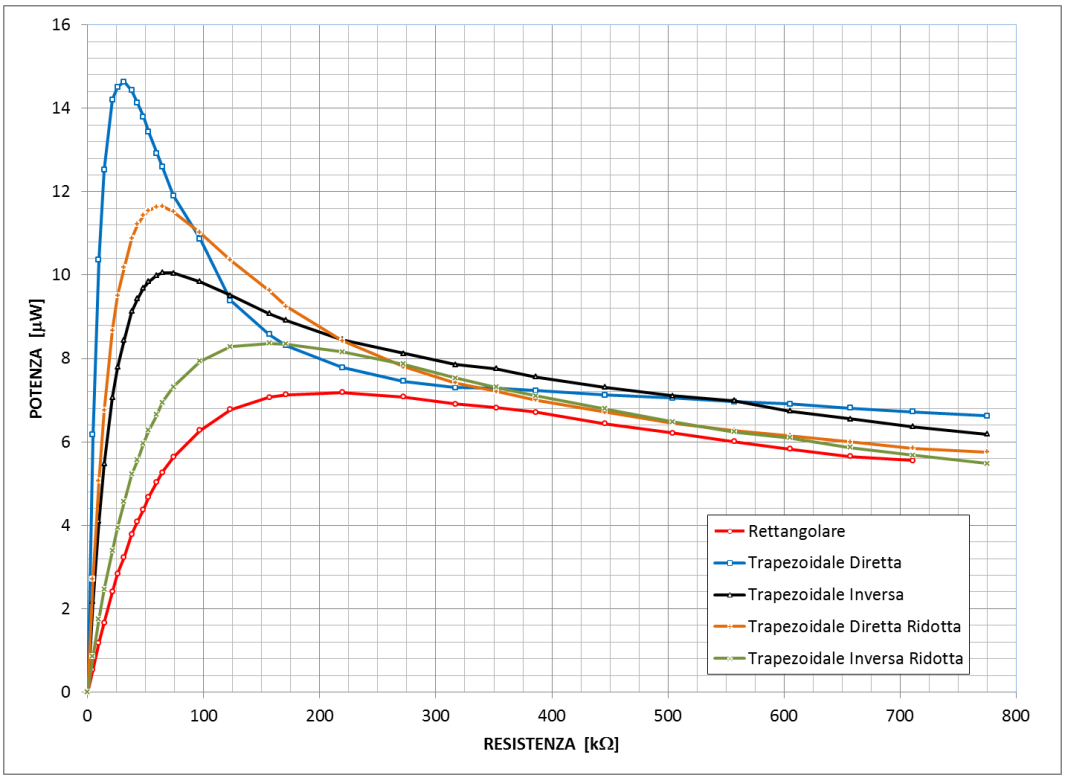

Fig. 3.24 *Confronto tra le curve sperimentali di potenza delle travi al variare della resistenza elettrica applicata*

3.4.5 Andamento della potenza specifica volumica

Dalle curve della potenza elettrica specifica volumica $P_{S\ max}$ al variare della resistenza elettrica applicata (Fig. 3.25), si possono notare andamenti simili ai precedentemente descritti della potenza elettrica, solamente si ha una variazione della scala delle curve rappresentanti le varie tipologie di travi. In quest'ottica si nota che la trave trapezoidale inversa a pari ingombro laterale raggiunge il picco massimo di circa 0,15 μW/mm^3, mentre il valore minimo di circa 0,05 μW/mm^3 è generato sempre dalla trave rettangolare. Anche in questo caso, si osserva che il valore della resistenza associata al picco è molto inferiore per la trave trapezoidale diretta a pari volume (circa 30 kΩ) che rispetto a quella rettangolare (circa 200 kΩ). Il valore asintotico medio pari a circa 0,06 μW/mm^3 è raggiunto con uno scarto totale molto alto, pari al 60%. In questo caso la trave trapezoidale inversa a pari ingombro laterale tende ad un valore superiore del 0,1 μW/mm^3, mentre la rettangolare tende al valore nettamente minore del 0,04 μW/mm^3.

Dai dati sperimentali analizzati si osserva che la potenza elettrica generata P_{max} nel caso di travi a geometria ottimizzata risulta maggiore, e nel caso di trapezoidale diretta a pari volume di valore quasi doppio, rispetto alla semplice configurazione rettangolare (Tab. 3.11).

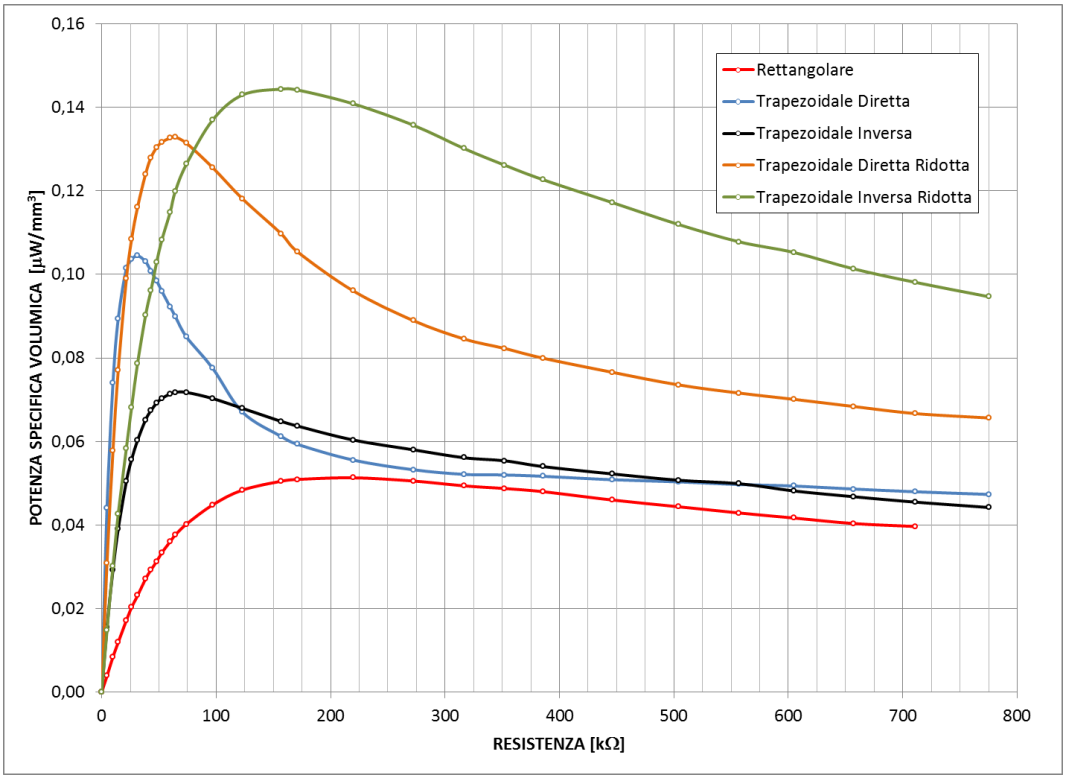

Fig. 3.25 *Confronto tra le curve sperimentali di potenza specifica volumica delle travi al variare della resistenza elettrica applicata*

Per la trave rettangolare la curva di potenza ha una concavità ridotta, il cui valore è diminuisce lentamente all'aumentare della resistenza applicata. Questo non vale invece per le altre tipologie di travi. Esse, infatti, tendono ad avere un picco molto accentuato alle basse resistenze, per poi decrescere rapidamente con valori quasi dimezzati alle alte resistenze. Da ciò se ne deduce che il carico resistivo applicabile ad una trave a geometria ottimizzata presenta un intervallo molto ristretto per massimizzare la potenza generata, rispetto che ad una semplice rettangolare. Difatti, per un carico resistivo superiore ai 200 kΩ la geometria utilizzata risulta quasi ininfluente.

Per quanto riguarda la potenza elettrica specifica volumica $P_{S\ max}$, le travi ottimizzate a pari ingombro laterale (trapezoidali ridotte) danno i valori più alti estraibili. Questo è dovuto al fatto che, per costruzione, sono costituite da un volume inferiore di materiale piezoelettrico rispetto alle altre tipologie di travi.

Tab. 3.11 *Confronto tra i valori sperimentali di potenza generata dalle travi*

	P_{max} [µW]	$P_{S\ max}$ [µW/mm^3]
Rettangolare	7,18	0,051
Trapezoidale Diretta	14,63	0,104
Trapezoidale Inversa	10,05	0,071
Trapezoidale Diretta Ridotta	11,66	0,133
Trapezoidale Inversa Ridotta	8,36	0,144

3.5 Confronto della potenza con i risultati in letteratura

Per avere un confronto dei risultati ottenuti da questo lavoro con alcuni dati presenti in letteratura [23], [24], [25], si è costruita una tabella comparativa delle potenze erogate (Tab. 3.12). Risulta difficile reperire dei risultati direttamente confrontabili, in quanto sono presenti numerose grandezze che posso assumere valori molto diversi tra loro. Ad esempio, nella tabella sono proposte delle grandezze che possono influenzare il dato di potenza ottenuto, come la presenza della massa d'estremità m_e o lo smorzamento ζ_g. Come riferimento sono inseriti l'accelerazione della base a, la frequenza di risonanza f_r e la resistenza ottima R_{ott}. Per rendere possibile un confronto diretto dei valori, è necessario scalare i valori di potenza [μW] per valutarli in termine di potenza specifica riferita all'accelerazione di gravità P_{max}/g^2 [μW/g^2]. Questo valore si ottiene moltiplicando la potenza P_{max} per il fattore $\left(\frac{g}{a}\right)^2$. Il confronto mostra che i valori di potenza misurati sperimentalmente, risultano confrontabili con quanto riportato in letteratura.

Tab. 3.12 *Confronto tra i valori di potenza numerici e sperimentali con la letteratura per la trave rettangolare*

	f_r [Hz]	R_{ott} [kΩ]	a [m/s^2]	P_{max} [mW]	P_{max}/g^2 [μW/g^2]	ζ_g [-]	m_e [g]	Dim. strato PZT [mm]	Mater.
FEM	55,9	50	0,28	6	7,4	0,020	7,5	25*14*0,2	PSI 5A4E
Sperim.	51,5	200	0,28	7,18	8,8	0,021	7,5	25*14*0,2	PSI 5A4E
Ertuk-Inman [23]	46	35	9,81	n.d.	23,9	0,027	12	50,8*31,8*0,26	PZT 5A
duToit-Wardle [25]	107	12	2,5	590	9,1	0,018	no	55*31,8*0,27	PZT 5A
Roundy-Wright [24]	120	160	2,5	80	1,23	0,015	8,5	6,5*3,2*0,14	PZT 5H

3.6 Confronto tra la potenza numerica e sperimentale

I risultati delle simulazioni numeriche presentati nel Capitolo 3, e le misure sperimentali, hanno permesso un confronto delle prestazioni delle geometrie ottimizzate. Risulta di interesse confrontare i risultati del modello numerico con le misure sperimentali della potenza erogata dalle travi piezoelettriche. Facendo riferimento alle sole tre geometrie di travi a pari volume (rettangolare, trapezoidale diretta ed inversa), si è costruito il grafico di (Fig. 3.26). In questo caso non sono state prese in considerazione le due travi a pari larghezza massima (trapezoidale diretta ridotta ed inversa ridotta) per motivi di dualità, in quanto si avrebbero solamente dei risultati scalati rispetto alle altre geometrie di travi.

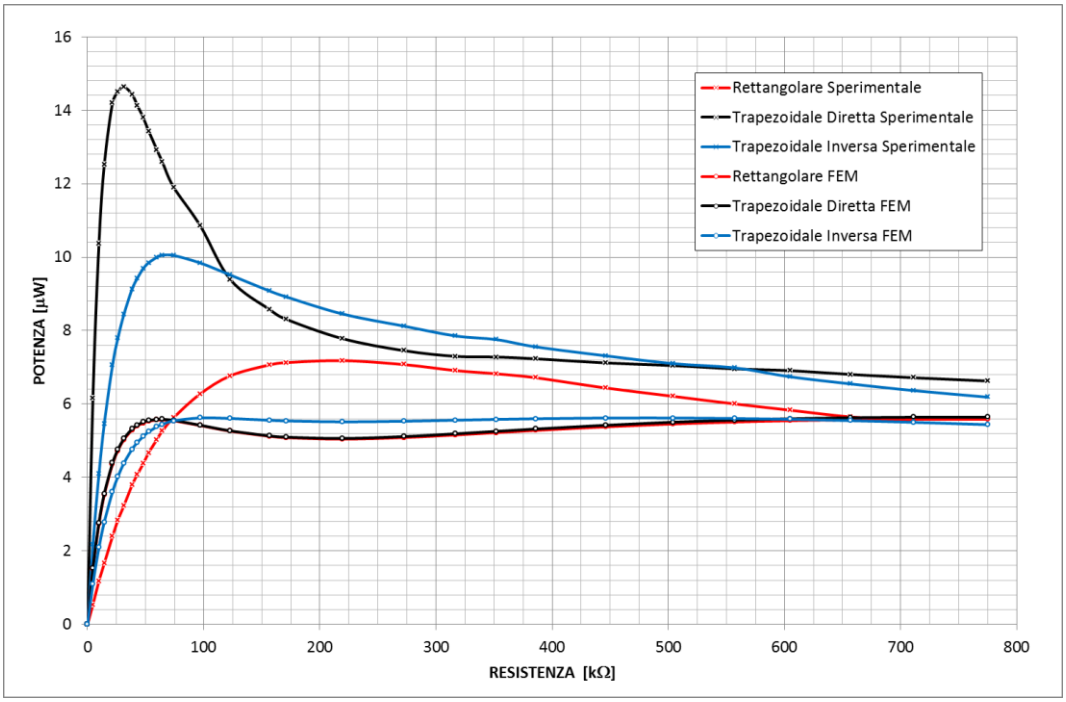

Fig. 3.26 *Confronto tra le curve numeriche e sperimentali di potenza delle travi a pari volume totale al variare della resistenza elettrica applicata*

Il confronto dei valori di potenza elettrica generata mostra una notevole differenza fra i risultati numerici e sperimentali. Ad esempio per la trave trapezoidale diretta si ha un errore sul valore di picco del 162%. Questo errore non deve stupire perché nei modelle usati per le simulazioni, sono presenti dei parametri affetti da notevole incertezza. Il parametro che governa la risposta del sistema meccanico è senza dubbio il valore dello smorzamento globale ζ_g dell'intera trave. Mentre per tutte le simulazioni si è utilizzato lo stesso valore, si può notare invece dalla (Tab. 3.13) che nella sperimentazione, facendo un'analisi con il metodo della mezza potenza sulla curva del modulo della funzione di trasferimento estremo-base, si hanno dei valori molto differenti uno dall'altro.

Tab. 3.13 *Confronto tra i valori di smorzamento globale numerico e sperimentale*

	ζ_g [-]	Errore % (0,02)
FEM	0,02	-
Rettangolare Sperimentale	0,0211	+5,5
Trapezoidale Diretta Sperimentale	0,0156	-22
Trapezoidale Inversa Sperimentale	0,0191	-4,5

Altri parametri che influenzano la potenza elettrica erogata sono il valore dell'accelerazione imposta alla base e la distanza del baricentro della massa d'estremità rispetto all'incastro alla base della trave. Durante le prove sperimentali la massa viene fissata manualmente, però la sua posizione è determinata da due fori passanti fatti sul sostegno metallico della trave, vedi (Fig. 2.4). Rimane così sempre un piccolo gioco tra le viti di fissaggio ed i fori, con una conseguente piccola incertezza di posizionamento. Inoltre, applicando un'accelerazione sinusoidale alla base della trave, che deve essere mantenuta costante da un controllore analogico in

retroazione, il suo valore presenta piccole variazioni nel tempo rispetto al valore desiderato.
Le incertezze di questi tre principali parametri, uniti ad altri di minore rilievo (coppia di serraggio delle viti all'incastro della trave, disturbi esterni, ecc.), determinano lo scostamento tra le curve visibili in (Fig. 3.26). Si tenga presente che, durante la creazione del modello, non era possibile prevedere il corretto valore dello smorzamento, il quale è stato comunque definito in base a valori suggeriti in letteratura [15]. Ad esempio, modificando il valore dello smorzamento del modello della trave trapezoidale diretta, si ottiene una nuova curva di potenza erogata che si avvicina molto a quella sperimentale (Fig. 3.27).

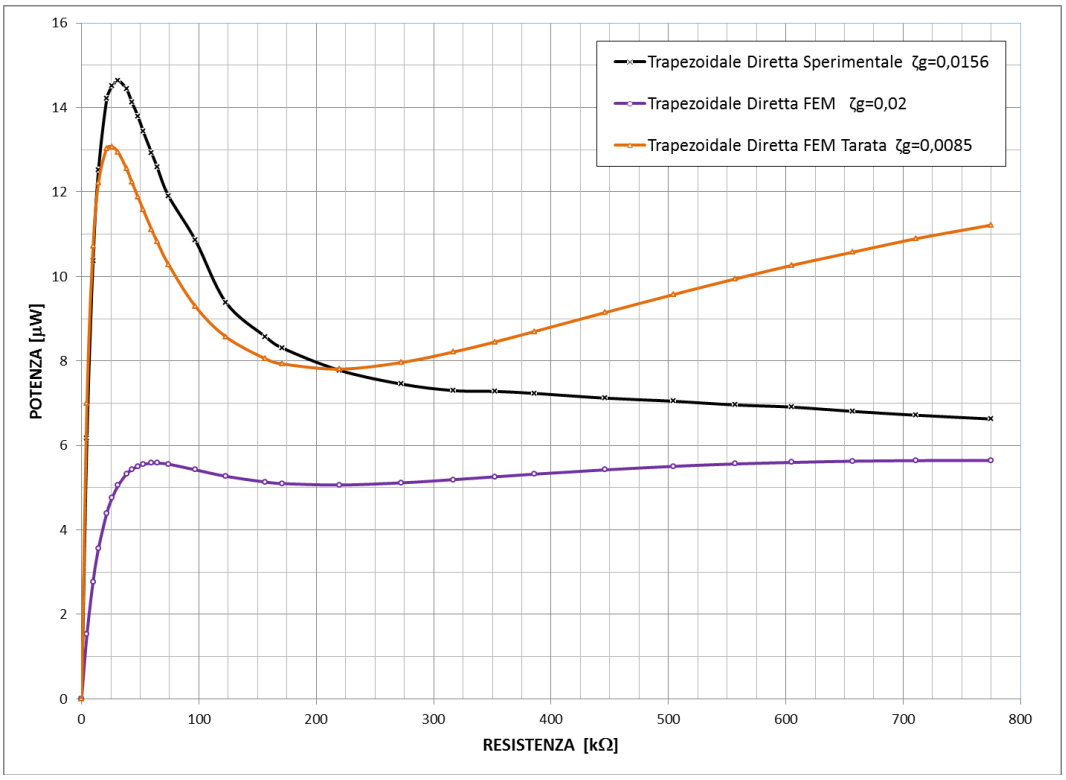

Fig. 3.27 *Confronto tra le curve numeriche con taratura e sperimentale di potenza della trave Trapezoidale Diretta a pari volume totale al variare della resistenza elettrica applicata*

Questa operazione di taratura può essere eseguita solo a posteriori. In questo caso si è utilizzato uno smorzamento di ζ_g=0,0085 con valore dimezzato rispetto al valore sperimentale di (Tab. 3.13).

4 Ottimizzazione della deformata

In questo capitolo verrà affrontata l'ottimizzazione dell'efficienza elettromeccanica di una trave rettangolare secondo la metodologia della deformata strutturale. La differenza di questa strategia rispetto alla precedente, sta nel fatto che le travi trapezoidali sono relativamente costose per le problematiche di fabbricazione dovute alla sagomatura. Invece, lavorando sulla deformata strutturale, come proposto in un precedente lavoro [26], si possono utilizzare travi rettangolari commerciali. In questo studio il contributo è stato nello sviluppare le simulazioni FEM e le misura sperimentali [27], [28]. Per la trave è stata proposta una deformazione imposta ad arco di cerchio rispetto alla normale deflessione parabolica. In accordo all'approccio teorico di applicare un momento costante all'estremità della trave, così da raggiungere la massima tensione di flessione sull'intera apertura, si è realizzato in pratica un particolare basamento sagomato dove la trave segue una deformata imposta sotto l'applicazione di un carico. Sono così stati sviluppati dei modelli teorici e numerici ad elementi finiti per valutare le prestazioni elettromeccaniche nei due casi di deformata ottenuta in condizioni di carico statico imposto. È stato quindi calcolato in un primo tempo il campo di spostamenti che massimizza la potenza in uscita di una trave a forma rettangolare, ottenendo una traiettoria a curvatura costante. In pratica, essa viene praticamente ottenuta forzando la trave a seguire un basamento sagomato avente una superficie cilindrica. Inoltre dal punto di vista teorico vengono considerati due casi differenti: sia di carico imposto in punta che uniformemente distribuito sulla trave. I risultati ottenuti dal modello analitico sono poi confrontati con simulazioni numeriche ad elementi finiti.

4.1 Modello analitico

Lo studio del modello analitico viene proposto in due procedimenti: uno studio di base riguardante la flessione della trave composta da materiale omogeneo ed uno studio ulteriore considerando la trave come composta da due strati di materiale piezoelettrico interposti da un supporto metallico. In entrambi i casi, sono state ricavate le equazioni del campo di spostamenti sotto carico.

4.1.1 Deflessione ottimale per trave omogenea

In un primo approccio semplificato, si è in un primo tempo studiato il comportamento a flessione di una trave omogenea ed isotropa. La configurazione di carico di figura (Fig. 4.1a), in cui la trave è incastrata ad un estremo e caricata con una forza all'estremità opposta, verrà di seguito denominata "configurazione di

riferimento" (*RC*). Nell'ipotesi della trave di Eulero-Bernoulli, la relazione tra momento flettente e curvatura risulta:

$$\frac{v''(x)}{\left(1+v'(x)^2\right)^{3/2}} = \frac{M(x)}{YI} \tag{4.1}$$

in cui $M(x)=F(l - x)$ è il momento flettente alla quota x prodotto da una forza F agente ad una distanza l dall'incastro, Y rappresenta il modulo elastico ed I il momento d'inerzia, mentre $v(x)$ è lo spostamento trasversale della trave.

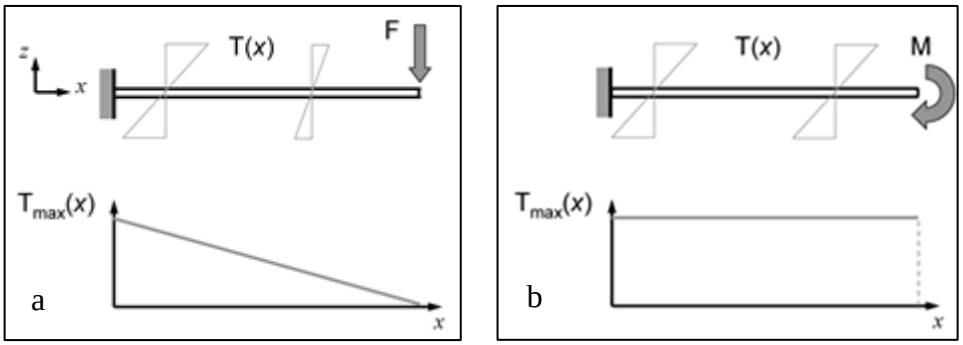

Fig. 4.1 *Configurazioni di deformata analizzate:*
a) configurazione di riferimento RC, b) configurazione ottimale ML

Con una condizione di carico con forza all'estremità, l'equazione (4.1) non risulta di facile soluzione; tuttavia, assumendo piccoli spostamenti, il termine $v'(x)$ si può trascurare ottenendo così una relazione linearizzata della curvatura a flessione [29]. L'integrazione con le opportune condizioni al contorno, fornisce il valore dello spostamento trasversale:

$$v^{\mathrm{RC}}(x) = \frac{F}{YI}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) \tag{4.2}$$

In ciascuna sezione trasversale, la tensione dovuta alla flessione assume un andamento lineare con un valore massimo di $T_{\max}(x)$ in corrispondenza della superficie esterna della trave. La $T_{\max}(x)$ ha una distribuzione lineare lungo la lunghezza della trave, ed il suo valore massimo $T_{\max}(0) = Flt/2I$ (trascurando gli effetti di concentrazione di tensione) viene raggiunto all'incastro (t rappresenta lo spessore della trave).
In accordo con l'equazione (4.2), un incremento della forza applicata all'estremità della trave produce un incremento proporzionale sia nella freccia che nella tensione massima all'incastro. Tuttavia, il carico d'estremità può essere incrementato finché la struttura raggiunge il limite di resistenza del materiale $T_{\lim}$. Il campo di spostamenti associato a tale limite di resistenza può essere ottenuto imponendo la condizione $T_{\max}(0)=T_{\lim}$, la quale fornisce una forza limite $F_{\lim} = T_{\lim}\frac{2I}{lt}$ che sostituita in (4.2), fornisce il corrispondente spostamento d'estremità massimo $v_{\lim}^{\mathrm{RC}}(l)$:

$$v_{\lim}^{\mathrm{RC}}(x) = \frac{2T_{\lim}}{Y\,t\,l}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) \tag{4.3}$$

Se questo spostamento limite è imposto all'estremo libero, il limite di resistenza $T_{\lim}$ è raggiunto solamente in prossimità dell'incastro, mentre la rimanente parte della trave presenta una tensione minore come mostrato in (Fig. 4.1a).
In analogia con la teoria delle molle a flessione, per una configurazione di carico *RC* il coefficiente di utilizzo [30] è pari ad $\psi = 1/9$. Esso può essere aumentato usando una differente geometria della sezione della trave (ad esempio con larghezza variabile linearmente oppure con spessore parabolico lungo la lunghezza) che assicura una tensione costante lungo la trave (il coefficiente di utilizzo prima menzionato sale dunque ad $\psi = 1/3$ per geometria triangolare). In confronto con i dispositivi rettangolari tradizionali, la costruzione di queste forme non convenzionali diventa di non facile realizzazione e di conseguenza molto costosa (ad esempio travi trapezoidali bimorfe), oppure addirittura difficilmente realizzabile (ad esempio travi bimorfe a spessore variabile parabolicamente).
Pertanto, l'approccio alternativo qui adottato è quello di raggiungere la tensione massima ammissibile sulla superficie esterna della trave caricandola con un momento flettente costante; questa condizione è mostrata in (Fig. 4.1b) e viene denominata a "limite massimo" (*ML*). In questa condizione di carico la trave si deforma secondo un arco a curvatura costante $1/R=M/YI$ e lo spostamento trasversale risulta:

$$v^{\mathrm{ML}}(x) = R\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}\right] \tag{4.4}$$

È possibile determinare il momento flettente limite, $M_{\lim}=2IT_{\lim}/t$, legato al limite di resistenza del materiale $T_{\lim}$ ed al corrispondente raggio limite di curvatura:

$$R_{\lim} = \frac{Y\,t}{2T_{\lim}} \tag{4.5}$$

Il momento $M_{\lim}$ fornisce, per ogni sezione trasversale della trave, una tensione massima di flessione uguale al valore limite $T_{\lim}$. Sostituendo l'equazione (4.5) nell'equazione (4.4), si ottiene lo spostamento in punta per la configurazione *ML*. Si può verificare che la quantità $v_{\lim}^{\mathrm{ML}}(l)$ è 1,5 volte maggiore rispetto a $v_{\lim}^{\mathrm{RC}}(l)$.

4.1.2 Deflessione ottimale per trave composita

L'analisi precedente viene ora estesa ad una trave piezoelettrica bimorfa con accoppiamento elettromeccanico. In questo approccio si vuole stimare la quantità di potenza elettrica generata da uno spostamento $v^{\mathrm{ML}}(x)$ che massimizza la deformazione meccanica media nella trave. Una tipica trave piezoelettrica bimorfa (polarizzata in direzione 3) è mostrata in (Fig. 4.2), dove t_{p} e t_{s} sono rispettivamente lo spessore del piezoelettrico e dello strato metallico interposto, mentre *w* rappresenta la larghezza della trave.

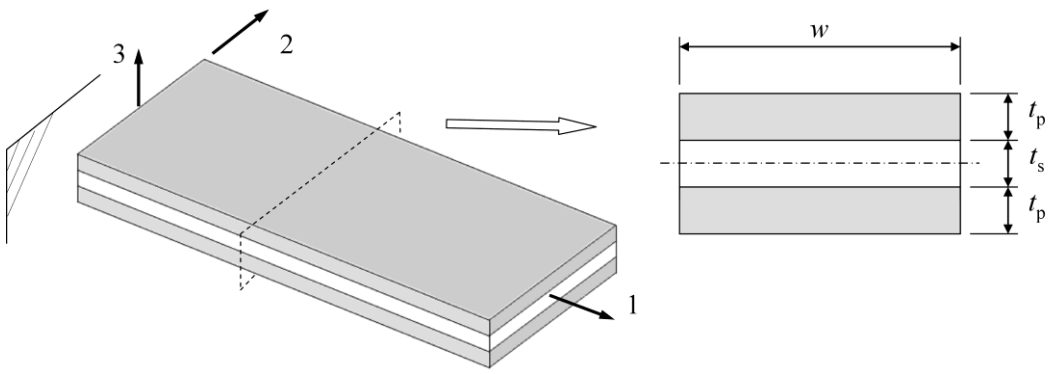

Fig. 4.2 *Trave piezoelettrica bimorfa polarizzata in modo {31}*

Le ben note equazioni costitutive in forma matriciale per i materiali piezoelettrici, in accordo con la notazione IEEE già richiamate nel Capitolo 1, sono:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}^{\mathrm{E}} & \mathbf{d}' \\ \mathbf{d} & \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

I simboli $\boldsymbol{T}$ ed $\boldsymbol{S}$ sono rispettivamente i vettori di tensione e di deformazione, $\boldsymbol{D}$ rappresenta il vettore spostamento elettrico, $\boldsymbol{E}$ il campo elettrico, $\boldsymbol{s}^{\mathrm{E}}$ la matrice di cedevolezza (a campo elettrico costante), $\boldsymbol{d}$ è la matrice dei coefficienti piezoelettrici (il simbolo $'$ indica l'operazione di trasposizione), mentre $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}$ è la matrice delle costanti dielettriche. Le sopracitate equazioni possono essere risolte esplicitamente sotto le ipotesi di tensione piana (tensione trasversale T_2=0) oppure deformazione piana (deformazione trasversale S_2=0).
Di seguito viene espressa la soluzione dell'equazione (4.6) per la trave bimorfa raffigurata in (Fig. 4.2) sotto l'ipotesi di tensione e deformazione piana. Essa è caricata da una flessione in modo {31} assumendo una condizione di circuito aperto (D_3=0). Dato x_3 come asse di polarizzazione, le cariche elettriche si separano lungo tale direzione e ne consegue che solamente la componente E_3 del campo elettrico risulta di interesse.
Nella condizione di tensione piana, la tensione trasversale T_2 risulta nulla. Solamente la tensione longitudinale $T_1 \neq 0$ è presente (anche tutte le tre deformazioni principali S_1, S_2 ed S_3 sono non nulle). Il sistema in equazione (4.6) si semplifica in:

$$\begin{cases} S_1 = s_{11} T_1 + d_{31} E_3 \\ S_2 = s_{12} T_1 + d_{31} E_3 \\ S_3 = s_{13} T_1 + d_{33} E_3 \\ 0 = d_{31} T_1 + \varepsilon_3^{\mathrm{T}} E_3 \end{cases} \tag{4.7}$$

Dopo averlo risolto rispetto ad E_3, può essere scritto come:

$$\begin{cases} S_1 = s_{11}\left(1-\dfrac{d_{31}^2}{\varepsilon_3^{\mathrm{T}} s_{11}}\right)T_1 \\ S_2 = s_{12}\left(1-\dfrac{d_{31}^2}{\varepsilon_3^{\mathrm{T}} s_{12}}\right)T_1 \\ S_3 = s_{13}\left(1-\dfrac{d_{31}\,d_{33}}{\varepsilon_3^{\mathrm{T}} s_{13}}\right)T_1 \\ E_3 = -\dfrac{d_{31}}{\varepsilon_3^{\mathrm{T}}}T_1 \end{cases} \tag{4.8}$$

Assumendo una condizione di circuito aperto (D_3=0), l'espressione analitica per T_1 ed E_3 in condizione di tensione piana risulta:

$$\begin{cases} T_1 = \dfrac{1}{s_{11}\left(1-\dfrac{d_{31}^2}{\varepsilon_3^{\mathrm{T}} s_{11}}\right)} S_1 = c_{11}^{*}\, S_1 \\ E_3 = -\dfrac{d_{31}}{\varepsilon_3^{\mathrm{T}}}T_1 \end{cases} \tag{4.9}$$

Nella deformazione piana, la deformazione trasversale risulta S_2=0, la quale genera la tensione addizionale $T_2 \neq 0$. La soluzione dell'equazione (4.6) diventa:

$$\begin{cases} S_1 = s_{11}T_1 + s_{12}T_2 + d_{31}E_3 \\ 0 = s_{12}T_1 + s_{11}T_2 + d_{31}E_3 \\ S_3 = s_{13}T_1 + s_{13}T_2 + d_{33}E_3 \\ 0 = d_{31}T_1 + d_{31}T_2 + \varepsilon_3^{\mathrm{T}}E_3 \end{cases} \tag{4.10}$$

Eliminando T_2 e definendo i coefficienti di rigidezza elettromeccanica equivalente:

$$s_{11}^{*} = s_{11}\left(1-\frac{d_{31}^2}{\varepsilon_3^{\mathrm{T}} s_{11}}\right) \quad ; \quad s_{12}^{*} = s_{12}\left(1-\frac{d_{31}^2}{\varepsilon_3^{\mathrm{T}} s_{12}}\right) \quad ; \quad s_{13}^{*} = s_{13}\left(1-\frac{d_{33}\,d_{31}}{\varepsilon_3^{\mathrm{T}} s_{13}}\right) \tag{4.11}$$

Si ottiene il sistema finale di equazioni:

$$\begin{cases} S_1 = s_{11}^{*}\left[1-\left(\dfrac{s_{12}^{*}}{s_{11}^{*}}\right)^2\right]T_1 \\ T_2 = -\dfrac{s_{12}^{*}}{s_{11}^{*}}T_1 \\ S_3 = s_{13}^{*}\left(1-\dfrac{s_{12}^{*}}{s_{11}^{*}}\right)T_1 \\ E_3 = -\dfrac{d_{31}}{\varepsilon_3^{\mathrm{T}}}\left(1-\dfrac{s_{12}^{*}}{s_{11}^{*}}\right)T_1 \end{cases} \tag{4.12}$$

Risolvendo si ottiene:

$$\begin{cases} T_1 = \dfrac{c_{11}^*}{\left[1-\left(\dfrac{s_{12}^*}{s_{11}^*}\right)^2\right]} S_1 \\ E_3 = -\dfrac{d_{31}}{\varepsilon_3^{\mathrm{T}}}\left(1-\dfrac{s_{12}^*}{s_{11}^*}\right) T_1 \end{cases} \tag{4.13}$$

Per travi bimorfe soggette a flessione, l'ipotesi di tensione piana sembra essere più realistica dato che la struttura non risulta caricata nelle direzioni 2 e 3 (inoltre risulta essere quella generalmente adottata in letteratura [10] [16], sebbene anche la deformazione piana è usata [17]). Oltre all'analisi monodimensionale, può essere considerato un modello analitico e numerico più complesso. Infatti, la quantità relativa di deformazione assiale e trasversale ad ogni strato (lungo la larghezza della trave) in travi a strati multipli, può essere differente manifestando una non trascurabile tensione trasversale (senza nessun carico trasversale imposto) [31]. Questa condizione si verifica per una discordanza nelle deformazioni trasversali. Esistendo un certo grado di vincolamento laterale della trave, il quale è più pronunciato nella parte centrale ed aumentato da un elevato rapporto larghezza/spessore (caratteristica delle comuni travi bimorfe generalmente impiegate), si viene a manifestare una tensione tangenziale.
Lo stato di tensione e deformazione reale tridimensionale in una trave bimorfa può essere studiato analiticamente con complessi modelli matematici [31] [32], o numericamente per mezzo di una analisi agli elementi finiti. Tuttavia, è stato sottolineato (e sarà confermato ulteriormente dai risultati mostrati) che il reale stato di tensione e deformazione tridimensionale in una trave stratificata è compreso tra quello dello stato di tensione piana e quello di deformazione piana. Ad esempio, in una piastra sottoposta a deformata flessionale circolare avente tutti i lati compresi quelli laterali vincolati, è presente uno stato di deformazione piana [17]. Tuttavia in una trave reale, la superficie laterale risulta scarica per cui si instaura localmente una condizione di tensione piana. Quindi, per ragioni tridimensionali, come per l'impossibilità di realizzare praticamente un vincolamento trasversale perfetto sull'intera trave bimorfa, le condizioni di tensione e deformazione piana non possono essere totalmente rappresentative del reale comportamento della trave. Questo giustifica l'analisi agli elementi finiti proposta nel paragrafo seguente per ottenere risultati più realistici. Inoltre, saranno derivate le soluzioni analitiche sotto le ipotesi di tensione e deformazione piana. Esse risultano molto utili per stimare velocemente un indice di prestazione della risposta elettrica del dispositivo e per poter rendere confrontabili le due configurazioni *ML* ed *RC*.
Le equazioni (4.9) ed (4.13) permettono il calcolo della tensione T_1 e del campo elettrico E_3 come funzione della deformazione longitudinale $S_1(x_1, x_3) \cong -x_3 v''(x_1)$, la quale è legata alla curvatura $v''(x)$ ed alla distanza x_3 dall'asse neutro.
Ulteriori commenti possono essere aggiunti in riferimento alle sopracitate equazioni. Il comportamento meccanico è ovviamente legato alle condizioni elettriche: infatti, c_{11}=1/s_{11} rappresenta la rigidezza elastica longitudinale del materiale piezoelettrico,

mentre c_{11}^{*} in questo caso è l'equivalente valutato a circuito aperto. Il fattore di accoppiamento elettromeccanico $k_{31}^{2} = d_{31}^{2} / \varepsilon_{3}^{\mathrm{T}} s_{11}$ è responsabile dell'effetto di irrigidimento piezoelettrico che si nota a circuito aperto, essendo $c_{11}^{*} = c_{11} / (1 - k_{31}^{2}) > c_{11}$. Inoltre, può essere notato un cambiamento della rigidezza commutando la condizione di tensione piana in deformazione piana. Questo effetto è dovuto all'incremento proporzionale al rapporto tra i coefficienti di flessibilità tra le direzioni trasversale e longitudinale, in accordo con l'effetto Poisson [17]. Viene così dedotta una conseguente variazione dell'effettiva rigidezza elastica del materiale piezoelettrico dalla prima espressione dell'equazione (4.13).
In accordo all'espressione sviluppata nel paragrafo (4.1.1), sia la deformazione limite sulla superficie esterna, che tutti i parametri rilevanti nello strato piezoelettrico, possono essere valutati come funzione del limite di resistenza del materiale piezoelettrico $T_{\mathrm{lim,p}}$. Ad esempio, per la configurazione *RC*, il valore limite dello spostamento in punta nelle condizioni di tensione piana risulta:

$$v_{\mathrm{lim,p}}^{\mathrm{RC}}(l) = \frac{T_{\mathrm{lim,p}}\, l^{2}}{3c_{11}^{*}\left(\dfrac{t_{\mathrm{s}}}{2} + t_{\mathrm{p}}\right)} \tag{4.14}$$

mentre il valore del raggio limite di curvatura per la configurazione *ML* è:

$$R_{\mathrm{lim,p}} = \frac{c_{11}^{*}}{T_{\mathrm{lim,p}}}\left(\frac{t_{\mathrm{s}}}{2} + t_{\mathrm{p}}\right) \tag{4.15}$$

Come parametro di efficienza meccanica, risulta utile definire una deformazione media $\bar{S}_{1}$ nello strato piezoelettrico, calcolata dall'integrazione sullo spessore e lunghezza del valore puntuale della deformazione $S_{1}(x_{1}, x_{3})$ in condizioni limite [33]. Ad esempio, le deformazioni medie in condizione limite per lo stato di tensione piana (espressioni simili si ottengono per deformazione piana) sono:

$$\bar{S}_{1,\mathrm{lim}}^{\mathrm{ML}} = \frac{T_{\mathrm{lim,p}}(t_{\mathrm{p}} + t_{\mathrm{s}})}{c_{11}^{*}\left(t_{\mathrm{p}} + \dfrac{t_{\mathrm{s}}}{2}\right)} = 2\bar{S}_{1,\mathrm{lim}}^{\mathrm{RC}} \tag{4.16}$$

Il potenziale elettrico *u* generato dalla trave bimorfa da una data flessione può essere infine valutato dalla seconda espressione dell'equazione (4.9). Se il materiale piezoelettrico è caricato fino al suo limite di resistenza, le due deformazioni medie limite $\bar{S}_{1,\mathrm{lim}}^{\mathrm{ML}} = 2\bar{S}_{1,\mathrm{lim}}^{\mathrm{RC}}$ danno i seguenti voltaggi massimi in uscita:

$$u^{\mathrm{ML}} = \frac{d_{31}}{\varepsilon_{3}^{\mathrm{T}}} \frac{T_{\mathrm{lim,p}}(t_{\mathrm{s}} + t_{\mathrm{p}})\, t_{\mathrm{p}}}{\left(\dfrac{t_{\mathrm{s}}}{2} + t_{\mathrm{p}}\right)} = 2u^{\mathrm{RC}} \tag{4.17}$$

dove $u \cong -E_3 t_p$ per una connessione in parallelo; lo stesso rapporto è ottenuto in condizioni di deformazione piana mediante l'equazione (4.13). L'adozione di una deformazione media ha anche il senso fisico di ottenere il potenziale elettrico che sarebbe misurato dagli elettrodi direttamente connessi agli strati piezoelettrici, che ovviamente acquisiscono tutte le cariche elettriche sulla loro superficie.
L'equazione (4.17) quindi conferma che la configurazione *ML* fornisce un voltaggio maggiore in uscita in confronto alla configurazione *RC*. Una veloce e facile misura delle prestazioni elettriche in differenti condizioni di carico può essere ottenuta utilizzando un semplice carico resistivo R_L, sebbene nella pratica non sia il più realistico. Gli strati piezoelettrici si comportano elettricamente come dei condensatori, aventi una capacità per singolo strato di $C = \varepsilon_3^S \varepsilon_0 wl / t_p$ dove w rappresenta la larghezza della trave.

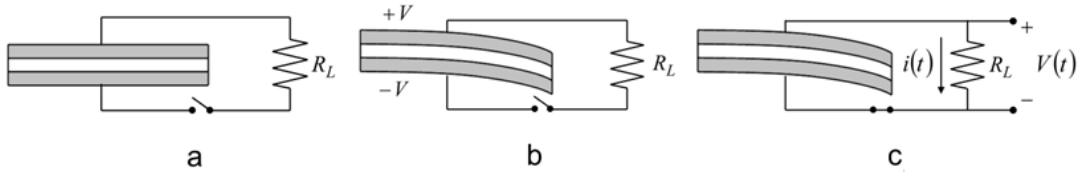

Fig. 4.3 *Sequenza di prova: (a) configurazione non deformata; (b) trave bimorfe deformata a circuito aperto; (c) chiusura interruttore con flusso di corrente nella resistenza*

La procedura mostrata in (Fig. 4.3) può essere usata per valutare la quantità di energia disponibile nella trave bimorfa: essa viene prima fatta flettere in condizione di circuito aperto (interruttore aperto), cosicché le cariche si separano all'interno degli strati di piezoelettrico. Di seguito l'interruttore viene chiuso permettendo il passaggio di corrente elettrica nella resistenza connessa a valle. L'interruttore assicura che il voltaggio sviluppato in condizione di circuito aperto (che può essere calcolato analiticamente come descritto sopra) e la potenza elettrica siano solamente funzione della deformata finale della trave, indipendentemente dal modo in cui essa viene raggiunta. Una volta inflessa la trave, si è assunto il suo permanere in tale posizione fintanto che la potenza prodotta viene interamente dissipata nel circuito con la resistenza.
La procedura descritta sopra assicura che il voltaggio generato dalla trave bimorfa è interamente trasferito al circuito. Tuttavia, il voltaggio istantaneo e la potenza dissipata nella resistenza R_L possono essere calcolati riferendosi ad un semplice circuito *R-C* come:

$$u(t) = u\, e^{-\frac{2t}{R_L C_{eq}}}, \quad P(t) = \frac{u^2}{R}\, e^{-\frac{2t}{R_L C_{eq}}} \tag{4.18}$$

dove $C_{eq}=C/2$ nella connessione serie e $C_{eq}=2C$ nella connessione parallelo tra i due strati di piezoelettrico. L'energia elettrica calcolata dall'integrazione dell'equazione (4.18) risulta $E=C_{eq}u^2/2$. Riferendosi all'equazione (4.17), la configurazione *ML* immagazzina una quantità di energia che risulta quattro volte maggiore di quella che si ottiene dalla configurazione *RC*.
Si nota che lo schema di prova proposto in (Fig. 4.3) richiede una sincronizzazione tra la flessione della trave e l'apertura e chiusura dell'interruttore. Per le applicazioni

pratiche, come descritto nei paragrafi successivi, sarà progettato un circuito con incluso un ponte rettificatore di corrente per permettere l'accumulo di energia durante una serie di flessioni ripetute. È importante notare che l'energia accumulata è in realtà indipendente da R_L. Quest'ultima invece controlla la risposta elettrica del circuito dopo la chiusura del circuito. Comunque, il valore di R_L può essere scelto ad arbitrio senza modificare le prestazioni relative delle configurazioni *RC* ed *ML*.

4.2 Modello agli elementi finiti

Nei paragrafi precedenti si è discussa la risposta elettromeccanica di una trave bimorfa a cui sia applicato un momento flettente costante. Dato che questa condizione di carico non è facilmente riproducibile in pratica, viene ora investigata la possibilità di ottenere il campo di spostamenti ottimale $v_{\lim}^{\mathrm{ML}}(x)$.

Come mostrato in (Fig. 4.4), la deformazione ad arco di cerchio sotto un momento flettente costante può essere esattamente replicata forzando la trave ad assumere la traiettoria di un basamento circolare. La deformazione può essere realizzata sia applicando una forza all'estremità che una pressione uniformemente distribuita sulla trave. Quest'ultima condizione viene considerata come più rappresentativa nelle applicazioni pratiche, dove tale pressione è generata da un blocchetto superiore.

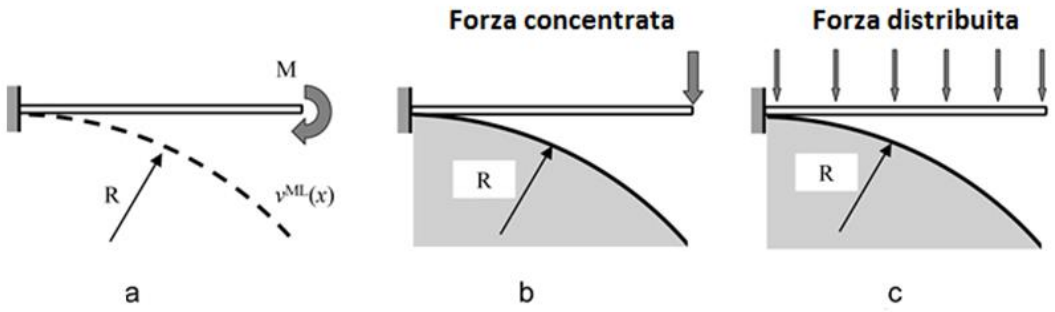

Fig. 4.4 *Modalità reali per ottenere un momento flettente costante: (a) configurazione teorica; (b)-(c) configurazione con basamento circolare e trave bimorfa caricata con forza d'estremità e pressione uniformemente distribuita*

Prima di realizzare il prototipo reale, è stato sviluppato un modello agli elementi finiti di una trave bimorfa in contatto con il basamento circolare per studiare la fattibilità e le prestazioni della configurazione di carico mostrata in (Fig. 4.4).

Il modello include sia la trave bimorfa che il basamento circolare, con un contatto senza attrito tra di essi. Solamente metà della struttura è stata modellata per sfruttare la simmetria, vedi (Fig. 4.5). È stata adottata una trave con dimensioni geometriche confrontabili con quelle di dispositivi commerciali (46 mm di lunghezza, 40 mm di larghezza e 0,2 mm di spessore ciascuno degli strati interni). Gli strati sono stati modellati come perfettamente incollati accoppiando gli spostamenti dei nodi in comune all'interfaccia. Il materiale piezoelettrico con accoppiamento elettromeccanico è stato modellato come un elemento solido ad 8 nodi con 4 gradi di libertà per ciascun nodo (3 componenti dello spostamento più il potenziale elettrico). Le caratteristiche meccaniche dei materiali usate nella simulazione numerica sono elencati in Appendice C. Gli elettrodi connessi agli strati piezoelettrici sono simulati

collegando fra loro tutti i nodi giacenti sulla stessa superficie esterna (ad esempio imponendo lo stesso grado di grado di libertà elettrico ad essi). L'analisi simula una singola deflessione della trave bimorfa fornendo il voltaggio di uscita e la potenza dissipata sulla resistenza connessa a valle degli strati piezoelettrici.
Il basamento circolare che impone il momento flettente costante ha un raggio di curvatura che è direttamente correlato al limite di resistenza del materiale piezoelettrico. Imponendo tale limite a $T_{\mathrm{lim,p}}$=55 MPa [34], il raggio limite di curvatura calcolato dall'equazione (4.15) risulta $R_{\mathrm{lim,p}}$=589 mm. Questo è giustificato considerando che nel punto più sollecitato della trave (ad esempio sulla superficie superiore , vicino al vincolo incastrato), la tensione principale massima risulta $T_{1,\mathrm{max}}$, indipendente dal valore della tensione trasversale T_2 e della terza componente di tensione (T_3=0 sulla superficie libera). Dal momento che il criterio di cedimento sotto carico statico è controllato dalla tensione principale massima [17], si può concludere che la condizione di cedimento della trave sotto flessione risulta, in prima approssimazione, indipendente dalla condizione di tensione o deformazione piana (o più in generale, dal campo reale di tensione tridimensionale compreso tra essi) come osservato ad esempio in (Fig. 4.6).
Il modello tridimensionale ad elementi finiti permette un'analisi più dettagliata delle distribuzioni di tensioni e deformazioni all'interno della trave bimorfa quando sottoposta a flessione. Come proposto nel paragrafo 4.1.1, le soluzioni analitiche derivate sotto le ipotesi di tensione e deformazione piana rappresentano solo una prima approssimazione del comportamento tridimensionale della trave bimorfa, che risulta invece chiaramente più complesso. È un dato di fatto che una condizione di tensione piana si instauri ai lati esterni della trave, dato che essi sono virtualmente scarichi. All'opposto, nella sezione media vicino alla sezione di simmetria longitudinale, si prevede una condizione di deformazione piana; essa si instaura a causa di un certo grado di vincolamento della deformazione trasversale, come discusso ad esempio da Timoshenko [17]. La risposta a flessione della trave è influenzata maggiormente dalla sua larghezza rispetto che a lunghezza e spessore (ad esempio, un ordine di grandezza maggiore rispetto allo spessore). Quindi, ci si può aspettare una transizione tra le due condizioni di tensione piana e deformazione piana all'interno della trave reale.
Si analizza per prima la flessione della trave bimorfa, il che permette il calcolo della distribuzione delle tensioni, vedi esempio (Fig. 4.6), ed il voltaggio di uscita dagli elettrodi connessi agli strati piezoelettrici. La risposta è calcolata per entrambe le configurazioni *RC* ed *ML* (quest'ultima riferita ad entrambe le condizioni di carico, forza d'estremità e pressione distribuita). Lo schema *RC* è realizzato imponendo all'estremo libero della trave bimorfa lo spostamento limite $v_{\mathrm{lim}}^{\mathrm{RC}}(l) = 1{,}2\ \mathrm{mm}$ calcolato con l'equazione (4.14) come funzione di $T_{\mathrm{lim,p}}$. In questo caso il modello del basamento non è necessario e la simulazione può essere fatta senza superfici di contatto. La configurazione *ML*, invece, viene simulata considerando un contatto graduale tra il basamento circolare e la trave bimorfa sottoposta ad un carico crescente. In questo caso non si è preso in considerazione alcun contributo all'accoppiamento elettromeccanico generato dal contatto tra lo strato inferiore del bimorfo ed il basamento. L'isolamento elettrico del bimorfo dovuto alla vernice garantisce l'assenza di contatto elettrico. Il basamento è stato quindi modellato con elementi solidi che non prevedono gradi di libertà di potenziale elettrico.

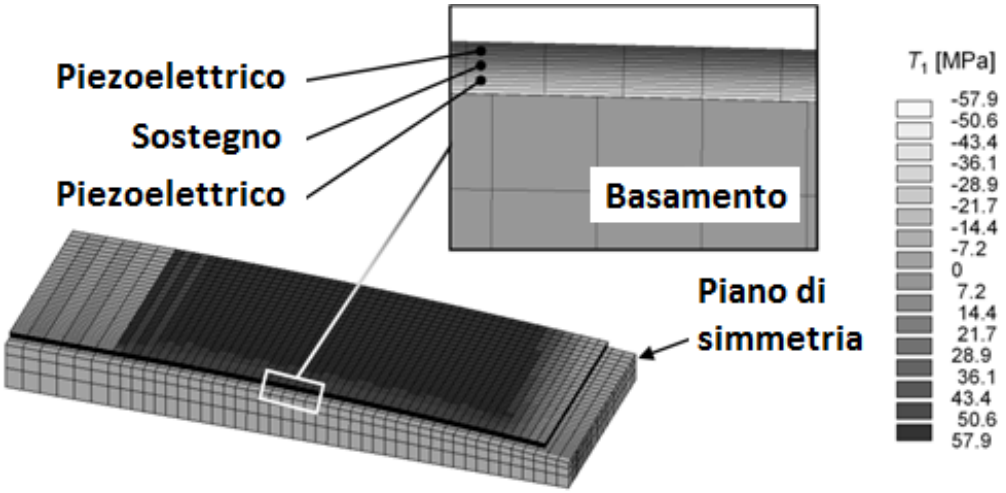

Fig. 4.5 *Modello agli elementi finiti (con simmetria geometrica) della trave bimorfa in contatto con il basamento circolare. Distribuzione delle tensioni di flessione T_1 causate da una pressione uniforme*

Per la configurazione con forza d'estremità, la tensione di flessione longitudinale T_1 valutata sulla superficie dello strato piezoelettrico è piuttosto costante lungo la direzione trasversale, come mostrato in (Fig. 4.6a). All'opposto, la tensione trasversale T_2 aumenta da un valore nullo ai lati esterni (tensione piana) fino ad un massimo sul piano di simmetria, dove si viene a creare uno stato di deformazione piana. Questa tensione positiva T_2 è proporzionale al vincolamento laterale che avviene nella sezione media della trave.
Sebbene si usi lo stesso basamento circolare, si osserva una differente distribuzione di tensioni se il carico applicato risulta una pressione distribuita sulla superficie superiore della trave (Fig. 4.6b). In confronto con la (Fig. 4.6a), in questo caso la tensione T_2 ha un andamento costante lungo la direzione trasversale, simile alla tensione di flessione T_1. Una condizione di deformazione piana si sviluppa anche vicino i lati esterni della trave, per effetto della pressione sulla superficie che forza la trave a seguire in modo migliore la forma ad arco di cerchio del basamento vicino alle regioni laterali.

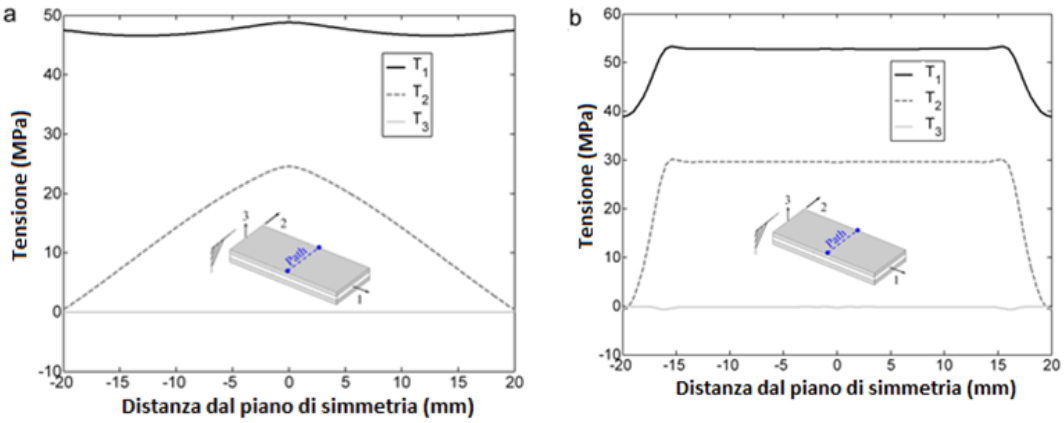

Fig. 4.6 *Tensione sulla superficie della trave lungo la direzione trasversale per il caso: (a) forza d'estremità; (b) pressione distribuita*

In base ai risultati precedenti, si può concludere che la tipologia di carico applicato ha un effetto sulla deformazione a flessione e sulla distribuzione di tensione risultante nella trave. In confronto al caso della pressione distribuita commentata prima, una forza applicata all'estremità non risulta capace di forzare la trave a seguire esattamente la forma circolare del basamento lungo la sua intera larghezza. Generalmente si viene a creare un piccolo interstizio (responsabile di una riduzione locale di tensione), il quale viene confermato da una leggera differenza tra gli spostamenti verticali misurati al bordo laterale e sezione media della trave. Come verrà discusso in seguito, questo comportamento influenza anche la risposta elettrica della trave bimorfa.
L'analisi agli elementi finiti simula il processo di scarica sulla resistenza di R=150 kΩ connessa a valle degli strati piezoelettrici, come nella procedura illustrata in (Fig. 4.3). Nel modello agli elementi finiti, il carico resistivo è presentato come un elemento adatto per analisi di circuiti piezoelettrici, con 2 nodi per definire il componente ed un grado di libertà per descrivere la risposta del circuito. Ad esempio, la (Fig. 4.7) mostra un confronto dei risultati tra il modello analitico e la simulazione numerica per la configurazione *ML* (caso a pressione costante). Si considera solo la curva del voltaggio in funzione del tempo come rappresentativa delle prestazioni del dispositivo, sebbene considerazioni simili siano applicabili anche alla potenza.
Viene ora commentata la differenza tra le curve analitiche di (Fig. 4.7). Come si può vedere, il voltaggio di uscita $u(t)$ sotto la condizione di tensione piana risulta maggiore della condizione a deformazione piana. Questo può essere spiegato considerando che il campo elettrico (e quindi il voltaggio) dipende dallo stato di tensione all'interno del materiale piezoelettrico. Come enunciato dalla seconda espressione nell'equazione (4.9) e (4.13), il campo elettrico E_3 è direttamente proporzionale alla tensione di flessione T_1, e di conseguenza alla deformazione di flessione S_1, la quale dipende solamente dalla curvatura imposta. Quindi, per una data deflessione, la stessa tensione T_1 viene ottenuta per entrambe le condizioni di tensione e deformazione piana. Tuttavia, in condizione di deformazione piana, la trave è vincolata anche sui bordi laterali e di conseguenza la tensione addizionale T_2 aumenta.

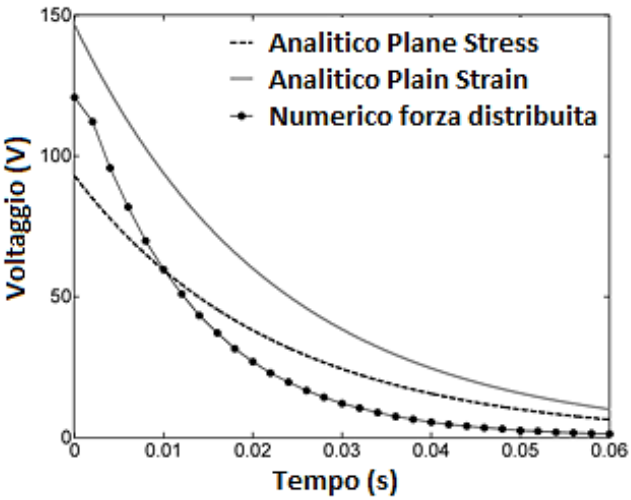

Fig. 4.7 *Curve numeriche di scarica del voltaggio per la configurazione ML con pressione*

La trave ha così una rigidezza maggiore e tende a comportarsi come una piastra, con una risposta elettrica aumentata che è fissata dal coefficiente $\left(1-s_{12}^{*}/s_{11}^{*}\right)>1$ nell'ultima espressione dell'equazione (4.13).
In (Fig. 4.7), anche il voltaggio calcolato dalle simulazioni numeriche mostra un decremento nel tempo che giace tra le curve analitiche di tensione e deformazione piana, quantomeno per tempi piccoli. La deviazione osservata può essere spiegata considerando le differenti condizioni usate per calcolare le curve. I dati analitici sono determinati dalla procedura mostrata in (Fig. 4.3). Essa assume che il voltaggio *u* generato dalla deflessione in condizioni di circuito aperto sia interamente estratto dalla trave bimorfa e trasferito alla resistenza durante la scarica. Non essendo stata eseguita l'analisi elettromeccanica transiente, il voltaggio ed il flusso di corrente nella resistenza vengono trattati come fenomeni separati (si ottiene così la tipica legge di decremento di un circuito *R-C* nell'equazione (4.18)). All'opposto, l'analisi agli elementi finiti simula l'analisi elettromeccanica transiente della trave bimorfa. Durante la scarica ed il conseguente flusso di corrente nella resistenza, la condizione elettrica della trave bimorfa si sposta da circuito aperto a circuito chiuso (attraverso l'accoppiamento in retroazione) e poi modifica la sua risposta meccanica sotto la deflessione imposta e conseguentemente anche la sua risposta elettrica (pertanto la curva di scarica non segue esattamente la legge di decadimento esponenziale). Ad esempio, questa particolare risposta è ulteriormente confermata dalla massima tensione di flessione presente sulla superficie esterna della trave bimorfa, che si è osservato non rimane costante nel tempo.
Una ulteriore prova di questo effetto è confermata notando che all'istante di tempo zero (prima che venga chiuso l'interruttore), quando il dispositivo è in condizione di circuito aperto come nel modello analitico, il voltaggio in (Fig. 4.7) giace tra le soluzioni analitiche. Invece, la deviazione avviene solamente per istanti di tempo maggiori, quando inizia il flusso di corrente.
Curve numeriche simili a (Fig. 4.7) sono ottenute per altre configurazioni, quali *RC* ed *ML* con forza d'estremità. Un riassunto di alcuni risultati analitici e numerici rilevanti è fornito in (Tab. 4.1).

Tab. 4.1 *Confronto tra risultati analitici e numerici, con le misure sperimentali*

Parametri	**Modello analitico** [a]				**3D FEM** [a]			**Misure sperim.** [b]		
	RC		ML		RC	ML		RC	ML	
	Tens. piana	Deform. piana	Tens. piana	Deform. piana		Forza estr.	Pres. unif.		Forza estr.	Pres. unif.
Picco voltaggio [V]	46.5	73.3	93	146.6	45.9	90	120	8.6	18.7	21.1
Picco potenza [mW]	14.4	35.8	57.6	143.3	14.0	54	96	0.5	2.3	3

[a] Valori ottenuti con le proprietà dei materiali di Appendice C
[b] Misure con una singola deflessione su trave commerciale MIDE

La configurazione *ML* in condizioni di pressione uniforme mostra la migliore prestazione elettrica (picco di voltaggio di 120 V, picco di potenza 96 mW), mentre

la condizione con carico d'estremità ha valori inferiori (picco di voltaggio di 90 V, picco di potenza 54 mW). Questo è dovuto ad una minore distribuzione di tensione e conseguentemente minore deformazione media all'interno della trave bimorfa. Valori inferiori sono ottenuti per una configurazione *RC* (con una riduzione maggiore del 50% almeno), dovuta alla sua deformazione a flessione non ottimizzata. I risultati numerici, inoltre, confermano la miglior prestazione elettrica di entrambe le configurazioni *ML* confrontate con la *RC*, con un aumento del picco di potenza generata di circa 4 e 7 volte, rispettivamente, la quale fornisce anche un'indicazione dell'aumento in energia elettrica che può essere fornita dalla configurazione *ML*.
In conclusione, la simulazione numerica ha permesso di confermare la fattibilità della prova proposta in (Fig. 4.4b-c) nello realizzare una deflessione ottimale. Inoltre, i risultati numerici confermano il reale vantaggio di una deflessione ottimale per ottenere un livello più elevato di potenza, che può arrivare ad essere fino a 4 volte maggiore.

4.3 Prove sperimentali

Con lo scopo di confermare i risultati analitici e numerici osservati nei paragrafi precedenti, sono state eseguite delle misure sperimentali. La trave piezoelettrica bimorfa usata negli esperimenti è a forma rettangolare tipo "V20W" prodotta dalla MIDE Technology Corporation. Entrambe le configurazioni *RC* ed *ML* (quest'ultimo caricato sia con forza d'estremità che con pressione distribuita) sono state valutate sperimentalmente, e per questo scopo sono stati usati due differenti supporti in alluminio, vedi (Fig. 4.8).
Per replicare la condizione di carico di forza d'estremità per la configurazione *RC* mostrata in (Fig. 4.1a), è stato realizzato un basamento con un piccolo scalino di altezza fissata nella sezione di incastro, vedi (Fig. 4.8a). La superficie del basamento sotto la trave risulta orizzontale, e permette alla trave sotto carico (incastrata da un lato) di flettersi liberamente nella direzione verticale. Il carico d'estremità, mostrato in (Fig. 4.1a) è semplicemente applicato a mano fintanto che l'estremità della trave ed il basamento arrivano a contatto reciproco. L'interstizio relativo tra essi controlla la deflessione verticale della trave e di conseguenza il suo grado di flessione.
La condizione di momento flettente costante della configurazione *ML* è ottenuta, invece, realizzando un basamento con superficie circolare (Fig. 4.8b). La trave (incastrata ad un estremo) è caricata applicando manualmente una forza all'estremità libera. In alternativa, la condizione di carico con pressione uniforme è stata realizzata comprimendo un blocchetto in polistirolo (non mostrato in figura) direttamente sulla superficie superiore della trave bimorfa flettendola fino al suo totale contatto con il basamento circolare. Il polistirolo usato è sufficientemente rigido per imporre, con deformazione trascurabile, la flessione richiesta alla trave.
Per le differenti configurazioni si sono confrontati i valori misurati di voltaggio e potenza elettrica generata. Per la configurazione *RC*, lo spostamento massimo imposto all'estremità è pari a 1 mm (cioè leggermente più basso della massima deflessione permessa dalla MIDE per questa tipologia di trave), mentre per la configurazione *ML* il basamento circolare è sagomato con un raggio di R=705,3 mm che genera uno spostamento massimo di estremità pari a 1,5 mm.

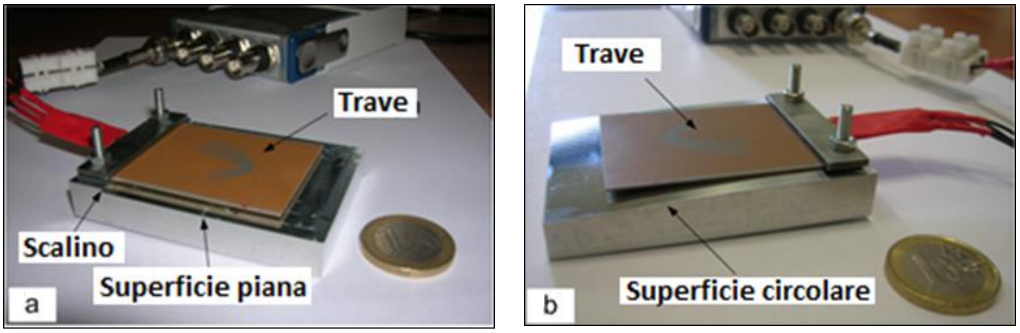

Fig. 4.8 *Prototipi per le configurazioni: (a) RC e (b) ML*

In questa analisi è stata considerata una connessione in parallelo tra i due strati piezoelettrici. Dopo aver imposto una singola flessione alla trave bimorfa, sono stati monitorati il voltaggio e la potenza dissipata nella resistenza di 150 kΩ seguendo la procedura descritta in (Fig. 4.3), ottenendo così la curva di scarica del dispositivo. Come menzionato precedentemente, la quantità di energia immagazzinata dopo la flessione risulta indipendente dalla resistenza R_L applicata, la quale controlla invece solamente la risposta elettrica transiente durante lo scarico della potenza. Il valore della resistenza R_L è stato scelto per ottenere un tempo ragionevole di scarica dell'energia (non è quindi il valore che assicura la massima dissipazione di potenza).

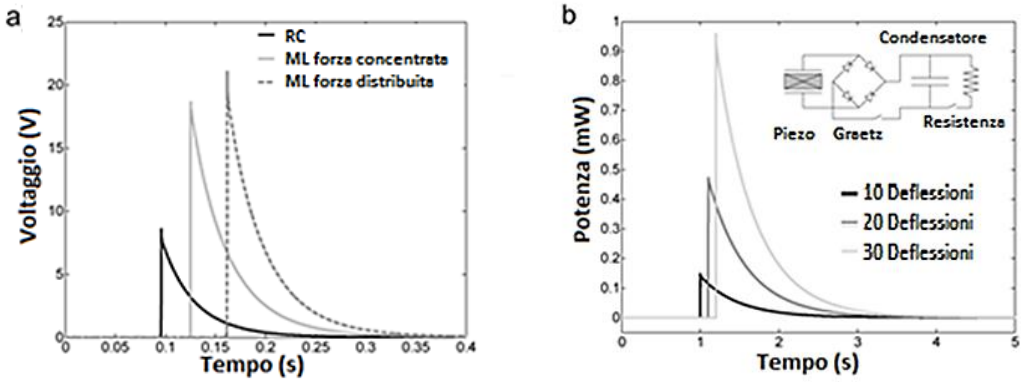

Fig. 4.9 *(a) Curve sperimentali del voltaggio per singola flessione; (b) curve di scarica dopo molteplici flessioni ripetute per la configurazione ML soggetta a pressione uniforme (una leggera traslazione nel tempo tra le curve è stata intenzionalmente introdotta per migliorarne la leggibilità).*

La (Fig. 4.9a) mostra le curve di voltaggio misurate per le configurazioni *RC* ed *ML* dopo una singola flessione della trave bimorfa. In maniera simile a quanto predetto dai modelli analitici e numerici, le prove sperimentali confermano che la configurazione *ML* (per entrambe le condizioni di carico d'estremità e pressione uniforme) fornisce sempre un voltaggio maggiore in confronto alla configurazione *RC*; gli incrementi relativi sono almeno di 2 o 3 volte (21,1 e 18,7 V rispetto a 8,6 V). Di conseguenza, il picco di potenza fornito dalla configurazione ottimizzata *ML* è circa 5 volte maggiore rispetto alla configurazione *RC*. Dal momento che l'energia totale immagazzinata è proporzionale all'area descritta dalla curva di scarica, i risultati ottenuti confermano l'incremento della prestazione elettrica fornita dalla configurazione ottimizzata *ML*.

Una differenza nel voltaggio in uscita si osserva anche in (Fig. 4.9a) in funzione al tipo di carico applicato (carico d'estremità o pressione uniforme), come già notato

nei risultati delle analisi agli elementi finiti, vedi Tab. 4.1. Più precisamente ci si attende un voltaggio maggiore per la condizione *ML* quando il carico è una pressione uniforme al posto di un carico d'estremità, dal momento che la condizione di flessione a curvatura costante è realizzata in modo più accurato. Tuttavia è evidente che nella configurazione *ML* è generalmente richiesto un carico all'estremità maggiore per imporre una flessione completa della trave in confronto alla condizione *RC*. Le forze richieste, in entrambi i casi sono piccole e praticamente possono essere trascurate quando si valuta l'incremento netto di energia.
La (Tab. 4.1) raccoglie sia i dati misurati che i risultati analitici e numerici. Tuttavia le misure sperimentali sui dispositivi MIDE non possono essere direttamente confrontate con i risultati dei modelli analitici e numerici, in quanto si ha una sequenza di stratificazione differente (Fig. 4.2) e delle proprietà meccaniche diverse dei materiali. Infatti, risulta non praticabile (anche mediante l'approccio agli elementi finiti) modellare precisamente la trave bimorfa MIDE usata negli esperimenti. Questo è dovuto ad una mancanza di informazioni sugli esatti spessori degli strati di materiale piezoelettrico e delle proprietà meccaniche dell'incollaggio e del rivestimento superficiale.
Una seconda ragione che impedisce un confronto diretto tra gli esperimenti con le simulazioni analitiche e numeriche è la differente quantità di flessione imposta alla trave. Infatti, l'entità di flessione della trave bimorfa MIDE era limitata in base allo spostamento massimo in punta indicato dalla sua scheda tecnica di utilizzo (circa 1 mm), che può essere probabilmente superato di una piccola quantità senza che sopraggiunga la rottura. In altre parole, se una flessione maggiore fosse stata imposta alla trave, si sarebbe ottenuto un maggiore livello di deformazione e di conseguenza una maggiore potenza generata.
Nonostante le considerazioni suddette, i dati presenti in (Tab. 4.1) permettono in ogni caso un confronto dell'incremento relativo nella potenza generata. Essa rappresenta un utile indice per valutare e per confermare la validità della strategia di ottimizzazione proposta. Per esempio, l'incremento relativo nel voltaggio e potenza elettrica misurata adottando la configurazione *ML* invece che la *RC* raggiunge un livello confrontabile con quanto predetto dai modelli analitico e numerico. Un incremento complessivo della potenza generata nel tempo si osserva sempre per la configurazione *ML*, come mostrato in (Fig. 4.9a).Questo è confermato dai valori sperimentali mostrati in (Tab. 4.1), con un aumento di circa 2,4 e 6 volte rispettivamente dei valori di picco del voltaggio e potenza generata. L'incremento relativo del voltaggio di picco è di circa il 20%, che risulta analogo a quanto stimato dalle simulazioni numeriche. La condizione di pressione uniforme risulta essere preferibile al posto della forza d'estremità perché assicura un miglior contatto con il basamento circolare che genera più alte deformazioni e quindi una generazione elettrica maggiore.
Sebbene i risultati mostrati in (Fig. 4.9a) sembrano molto promettenti, essi si riferiscono alla potenza generata dopo una singola deflessione, che può non essere utilizzabile in applicazioni reali. In questo caso, si dovrebbe realizzare un dispositivo capace di immagazzinare l'energia prodotta da carichi applicati ripetutamente nel tempo. A questo scopo è stato progettato un circuito appropriato (vedi schema in alto di Fig. 4.9b) per permettere un accumulo di energia dopo una sequenza di flessioni multiple, che si avvicina di più ad una situazione realistica. Questa configurazione

rende il dispositivo particolarmente adatto a fornire una grande quantità di energia in istanti di tempo ritardati.
Lo schema in figura (Fig. 4.9b) mostra un ponte rettificatore da corrente alternata a continua (AC-DC) connesso agli elettrodi della trave bimorfa, che è posizionato prima di un condensatore (47 μF) che accumula l'energia elettrica per un uso successivo per alimentare dispositivi elettrici o ricaricare batterie. Negli esperimenti, è stato usato un semplice carico resistivo (19,8 kΩ) per simulare un dispositivo che dissipi l'energia prodotta. Questo particolare valore di resistenza è stato scelto solo per ridurre convenientemente il tempo di scarica, infatti quando si considerano dei carichi più realistici, si osserva una risposta elettrica più complessa.
La risposta elettrica della trave bimorfa connessa al circuito autocostruito mostrato in (Fig. 4.9b) è stata ottenuta applicando carichi multipli a differenti velocità di esecuzione. La velocità di imposizione del carico (frequenza di carico) non influenza la risposta dinamica della trave bimorfa, in quanto risulta molto inferiore alla sua frequenza di risonanza. Conseguentemente, anche l'accumulo di energia e la risposta del circuito sono altrettanto insensibili alla frequenza di carico (esso poteva essere impulsivo ed anche ripetuto con ogni velocità desiderata).
Inoltre, la configurazione proposta è anche capace di immagazzinare energia per carichi imposti a bassa frequenza, come quelli caratterizzati dal movimento umano. In questo caso, la costante di tempo di scarica può essere considerata minore ed anche non influenzata dalla velocità del carico applicato.
Nella prova, dopo alcune deflessioni imposte alla trave bimorfa (es. 10, 20, o 30), l'interruttore viene chiuso e conseguentemente la resistenza risulta in serie al piezoelettrico in modo tale così da misurare il voltaggio di scarica nel tempo. I risultati per la configurazione *ML* con pressione uniforme sono mostrati in (Fig. 4.9b). Il valore di resistenza è stato calibrato per ridurre il tempo di scarica. Come previsto, il picco di potenza (e quindi la quantità netta di energia immagazzinata) è circa proporzionale al numero di deflessioni della trave. Nelle applicazioni pratiche, anche un piccolo carico può essere capace di produrre una deflessione della trave e quindi di accumulare energia. Questo evidenzia il grande vantaggio di questo dispositivo per immagazzinare un certo quantitativo di energia elettrica anche da una piccola quantità di energia meccanica. Inoltre, siccome non è necessaria una vibrazione ad una frequenza che porti in risonanza la trave, qualsiasi tipo di carico variabile nel tempo può essere capace di produrre energia.

4.4 Conclusioni

Questo capitolo ha studiato la possibilità di aumentare la potenza elettrica generata da classiche travi rettangolari imponendo una deflessione ottimale, piuttosto che progettare geometrie non convenzionali (trapezoidali). L'approccio seguito è stato quello di applicare un momento flettente costante lungo l'intera lunghezza della trave premendola contro un basamento avente una superficie circolare. Il minimo raggio di curvatura del basamento è determinato confrontando la massima tensione di flessione nella trave bimorfa con il limite di resistenza del materiale piezoelettrico.
La risposta elettromeccanica (tensione, voltaggio di uscita e potenza generata) di questa configurazione ottimale (chiamata '*ML*') è stata confrontata con una trave semplicemente caricata all'estremo libero (chiamata '*RC*').

È stato prima sviluppato un modello monodimensionale analitico per avere una stima della risposta elettromeccanica delle configurazioni *RC* ed *ML* sotto differenti condizioni di carico. Sono state ottenute espressioni analitiche per la deformazione media ed il voltaggio sotto l'ipotesi di tensione piana e deformazione piana. Esse mostrano come la configurazione *ML* è caratterizzata da un livello doppio di deformazione media e voltaggio di uscita rispetto alla configurazione *RC*. Tuttavia, è stato, anche presentata una discussione critica del limite di validità di un modello analitico monodimensionale, nel cogliere il comportamento reale della trave bimorfa.
È stato successivamente sviluppato un modello tridimensionale agli elementi finiti per ottenere una risposta più accurata del sistema. Questa analisi numerica, che simula la trave bimorfa in contatto con il basamento circolare, ha reso possibile valutare la fattibilità della configurazione ottimale prima della realizzazione pratica del prototipo.
Il confronto dei risultati analitici e numerici (campo delle tensioni e delle deformazioni, potenza generata) conferma i vantaggi della configurazione *ML*, con un voltaggio d'uscita di circa il 50% maggiore rispetto alla configurazione non ottimizzata *RC*. Inoltre le simulazioni numeriche hanno mostrato piccole deviazioni rispetto alle curve analitiche, il che viene spiegato considerando le differenti ipotesi usate per calcolarle. In particolare, nelle simulazioni numeriche l'accoppiamento del circuito elettrico alla trave bimorfa durante il flusso di corrente è stato correttamente simulato, mentre il modello analitico fornisce solamente una risposta elettromeccanica semplificata.
Le simulazioni agli elementi finiti mostrano anche l'effetto della condizione di carico nella risposta meccanica ed in maniera più importante in quella elettrica del sistema.
Una pressione uniforme dimostra di essere più efficace per imporre la flessione ottimale desiderata, con una distribuzione di tensione uniforme all'interno della trave. Questo ha dato come risultato dei livelli di potenza leggermente maggiori, per lo stesso livello massimo di tensione. Ad ogni modo, a parte una più complessa distribuzione tridimensionale di tensione nella trave bimorfa rispetto ai risultati analitici, anche le simulazioni numeriche confermano le migliori prestazioni elettromeccaniche della configurazione *ML* rispetto alla *RC*.
Infine, sono state eseguite delle prove sperimentali per verificare ulteriormente l'incremento di potenza elettrica data dalla configurazione ottimizzata proposta. Non è stato possibile fare un confronto diretto tra i dati analitici e numerici, a causa della difficoltà di poter replicare in maniera uguale le configurazioni. Tuttavia, è stato possibile mostrare un confronto dell'incremento relativo nelle prestazioni elettriche, che ha confermato l'aumento della potenza trasmessa della configurazione *ML* rispetto alla *RC*.
Per poter realizzare un dispositivo utilizzabile nelle applicazioni pratiche, è stato incluso nel circuito elettrico un convertitore di corrente AC-DC. Questo permette un immagazzinamento continuo di energia su un condensatore anche con una sequenza multipla di deflessioni della trave bimorfa. Dopodiché, l'energia può essere immagazzinata fino ad una grande quantità che può risultare particolarmente utile per alimentare dispositivi elettrici funzionanti in maniera intermittente. Misure sperimentali con questa nuova configurazione mostrano che la quantità di energia immagazzinata è proporzionale al numero di deflessioni e può raggiungere valori relativamente alti.

Considerando che in questo studio è stata usata una semplice resistenza per simulare il carico elettrico, una ottimizzazione addizionale nella potenza trasmessa può essere ottenuta da un progetto appropriato del circuito elettronico connesso alla trave bimorfa.
In conclusione, i risultati analitici, numerici e sperimentali presentati in questo capitolo hanno mostrato la possibilità di ottenere una potenza elettrica maggiore ottimizzando la deformata flessionale di una trave. Il principale vantaggio della strategia proposta è la possibilità di usare la classica trave a forma rettangolare (facilmente acquistabile sul mercato), al posto di progettare una più sofisticata geometria non convenzionale (es. trapezia), che risulta più difficile da costruire e di conseguenza anche più costosa. Ad esempio nelle applicazioni studiate in questa tesi le geometrie trapezie hanno avuto un costo di prototipazione di quasi cinque volte maggiore della trave commerciale rettangolare. In questo senso, un dispositivo con trave rettangolare commerciale troverebbe facilmente applicazione per una produzione di serie, mentre con una trave trapezia si avrebbe un'applicazione per limitato impiego.

5 Trave con geometria ad E: simulazione numerica

In questo capitolo viene proposta una differente geometria ottimizzata con profilo ad E, simile ad alcuni dispositivi discussi in letteratura [35], [36], [37]. La risposta elettromeccanica del sistema eccitato da un'accelerazione alla base è studiata mediante simulazioni numeriche ad elementi finiti.

5.1 Progetto della geometria ad E

Una trave a mensola rettangolare bimorfa (Fig. 5.1a) lavora efficacemente solamente quando viene fatta vibrare in una sua frequenza propria (generalmente il 1° modo, in cui si ha flessione massima).Siccome tali modi propri di vibrare si instaurano a frequenze molto distanti tra loro, e comunque con un livello di risposta in frequenza decrescente rispetto al primo modo, in questo caso viene sfruttata solamente la fondamentale. Si presenta però l'inconveniente che l'intervallo utile di frequenza prossima al primo modo, il quale assicura un buon rendimento di conversione elettromeccanica, risulta molto stretto. Questo implica che, se la trave viene sollecitata con vibrazioni a frequenza non prossima alla fondamentale, il rendimento di conversione cala bruscamente. A questo punto si può cercare di ovviare al problema andando ad avvicinare molto le frequenze dei primi modi sagomando opportunamente la trave (Fig. 5.1b). Da ciò ne deriva che l'intervallo utile di frequenza utilizzabile con un adeguato rendimento di conversione si allarga.

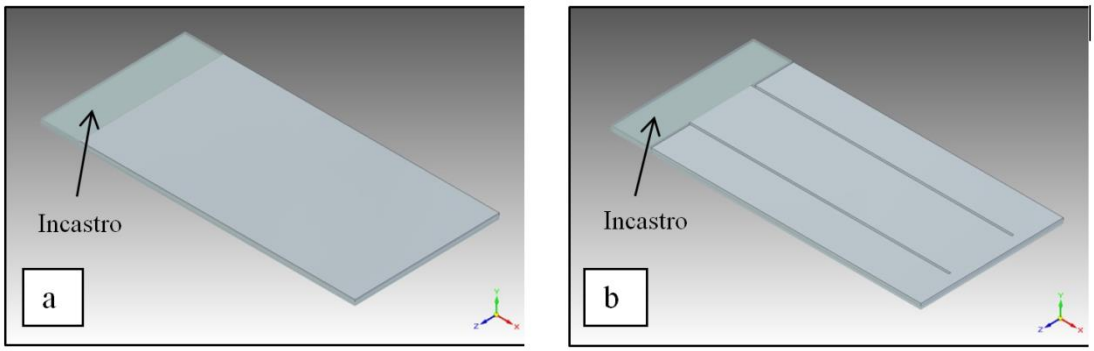

Fig. 5.1 *Trave a mensola: a) rettangolare; b) con geometria ad E*

D'altra parte si può sfruttare il fatto di far deformare meglio il materiale costituente la trave, in maniera tale da incrementarne il suo coefficiente di utilizzo ψ, con un principio simile a quanto già esposto nel capitolo precedente. Questo principio

schematicamente si spiega dal fatto che, le due lamine esterne che si vengono a creare dal taglio della trave si muovono come un corpo rigido nei primi modi. Esse quindi si comportano come delle masse che hanno il baricentro situato a circa metà lunghezza della trave ad E. La dinamica crea così una forza d'inerzia applicata a tale baricentro, la quale presenta quindi un braccio rispetto al punto d'unione ad estremità della trave ad E. Si viene così a generare un momento flettente che si scarica sull'estremo libero, e conseguentemente la parte di trave centrale viene deformata con un coefficiente di utilizzo maggiore (questo perché si realizza un momento flettente invece che una specie di carico puntiforme di estremità, per esempio la massa). Chiamando con w_c la larghezza della parte di trave centrale rispetto alla larghezza totale w, rimane quindi da trovare quale sia il valore ottimale del rapporto di larghezza χ definito in (5.1), per il quale si ottiene una potenza elettrica d'uscita maggiore rispetto alla stessa trave rettangolare non sagomata.

$$\chi = \frac{w_c}{w} \tag{5.1}$$

Si deve comunque tenere in considerazione che le frequenze fondamentali per la trave rettangolare e la trave ad E sono differenti tra loro. Ovvero quanto più il coefficiente χ diminuisce e tanto più saranno distanziate tra loro (Fig. 5.7). A questo proposito si è proposta una serie di simulazioni con dei valori χ crescenti (0,43-0,5-0,57-0,71-0,86-0,93) per determinare l'andamento della potenza d'uscita.

5.2 Simulazione numerica

Si considera una trave rettangolare avente le dimensioni fornite in Appendice A, con la particolarità di non avere le parti metalliche del sostegno al di fuori dello strato di piezoelettrico in testa ed in coda (per cui la lunghezza totale è di soli 28,5 mm). I materiali utilizzati sono esattamente quelli di Appendice C. Avendo la larghezza della trave di w=14 mm si ottengono i valori di w_c dati in (Tab. 5.1).

Tab. 5.1 *Valori di χ e di w_c*

χ	w_c [mm]	χ	w_c [mm]
0,43	6	0,71	10
0,50	7	0,86	12
0,57	8	0,93	13

La parte di trave vincolata come incastro corrisponde ad una lunghezza di 3,5 mm come si vede dalla (Fig. 5.1). Il taglio sagomato al L, parte da tale posizione e si estende fino ad una distanza di 1 mm dall'estremo libero. Lo spessore di tale taglio è ipotizzato pari a 0,2 mm. Lo spessore dello strato di materiale piezoelettrico è di 0,2 mm mentre quello del sostegno interno è di 0,1 mm.

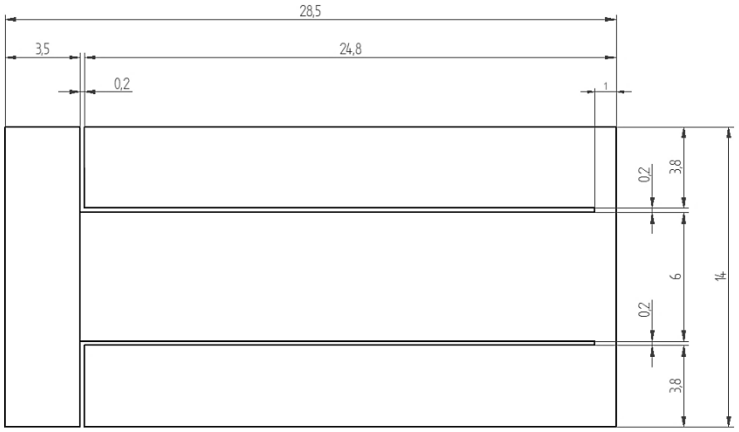

Fig. 5.2 *Quote dimensionali della trave con geometria ad E con χ=0,43*

Si evidenzia il fatto che esso risulta simmetrico per entrambi i lati della trave, rispetto all'asse centrale. In questo studio non è stata inserita alcuna massa aggiuntiva d'estremità. Il modello agli elementi finiti (Fig. 5.3) è di tipo elettromeccanico accoppiato ed utilizza gli stessi tipi di elementi già descritti nel Capitolo 2 in (Fig. 2.8). Anche in questo caso ipotizza di applicare una resistenza posta nel circuito elettrico a valle della trave. Il collegamento tra i due strati di materiale piezoelettrico, anche in questo caso è ottenuto mediante polarizzazione in serie.

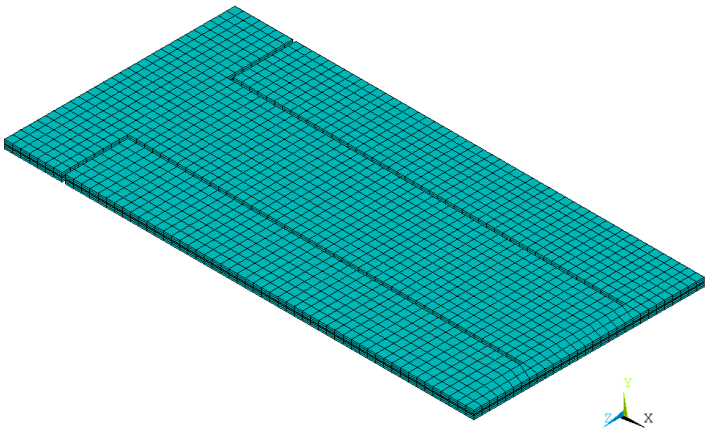

Fig. 5.3 *Modello FEM della trave con geometria ad E con χ=0,43*

L'analisi modale mostra che questa geometria di trave ad E presenta delle frequenze corrispondenti ai primi modi di vibrare molto vicine tra loro rispetto che alla semplice rettangolare, come si vede in (Tab. 5.2). Questa peculiarità viene sfruttata per incrementare la banda utile di frequenza a cui la trave può essere sollecitata mantenendo un buon livello di conversione elettromeccanica. Si può notare inoltre che quando $\chi \rightarrow 1$, ovvero quando la trave ad E tende ad avere un'unica impronta rettangolare, le frequenze dei primi tre modi propri tendono a raggiungere il valore della frequenza fondamentale della trave rettangolare.

Tab. 5.2 *Valori delle frequenze dei primi tre modi propri per la trave ad E e rettangolare con resistenza da 4,6 kΩ*

	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]
χ=0,43	232	258	272
χ=0,50	251	279	286
χ=0,57	270	299	300
χ=0,71	312	337	339
χ=0,86	366	372	378
χ=0,93	379	392	396
Rettang.	**399**	1502	2430

Osservando i primi tre modi propri di vibrazione (Fig. 5.4), si possono avere due condizioni di oscillazione delle ali laterali: in fase od in controfase. Un inconveniente dell'oscillazione in controfase, però, è che si viene ad instaurare nella trave anche un momento torcente (Fig. 5.4c). Questi tre modi contribuiscono in maniera diversa alla deformazione del materiale piezoelettrico, come si può dedurre dal voltaggio generato della trave (Fig. 5.5). Analizzando la curva del voltaggio, risulta evidente che il modo che garantisce una conversione elettromeccanica migliore è il secondo. Per il primo modo invece è più che dimezzata, mentre il terzo risulta addirittura non distinguibile dalla curva discendente del secondo modo.

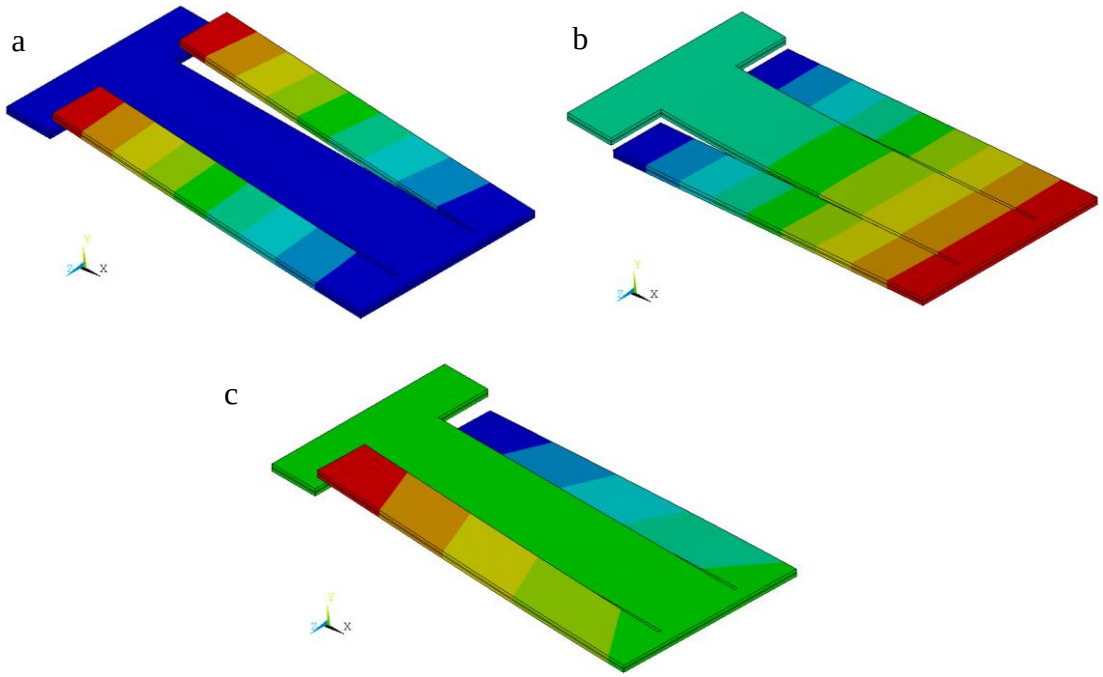

Fig. 5.4 *Modi propri di vibrare della trave ad E con χ=0,43: a) primo 232 Hz; b) secondo 258 Hz; c) terzo 272 Hz*

Questa tipologia di sagomatura della trave mediante taglio genera però degli intagli alla base delle ali laterali. Questo pone il problema di una possibile propagazione dell'intaglio dovuto al meccanismo ciclico affaticante.

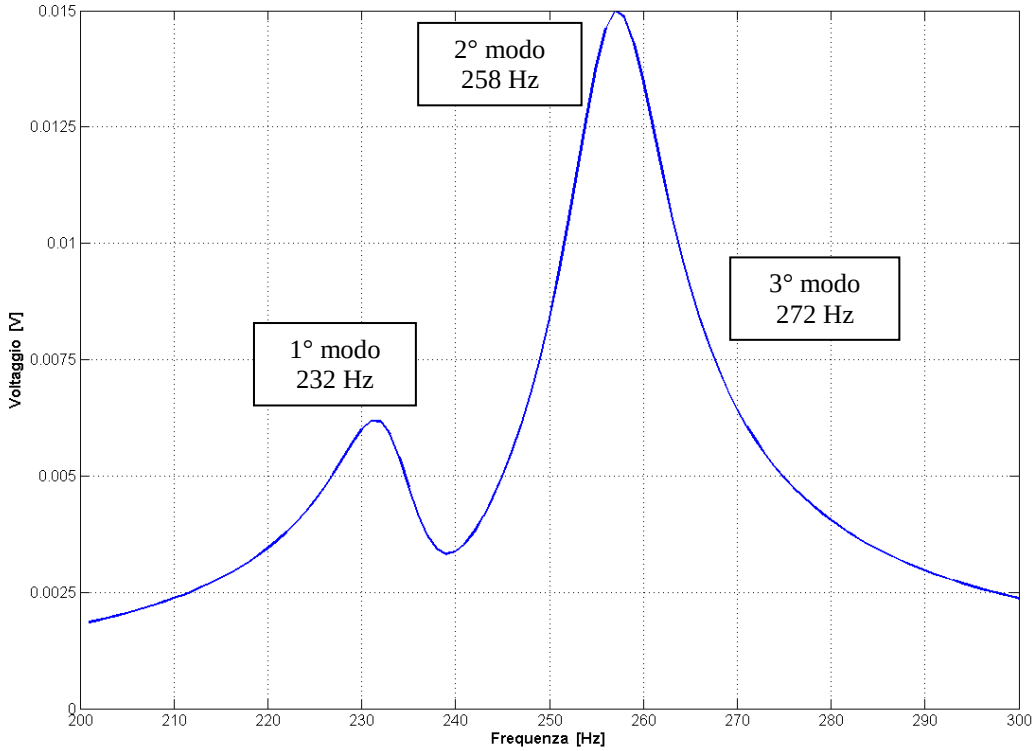

Fig. 5.5 *Andamento della curva di voltaggio in funzione della frequenza per valori di resistenza di 4,6 kΩ calcolata al FEM per la trave ad E con χ=0,43 (a=280 mm/s^2)*

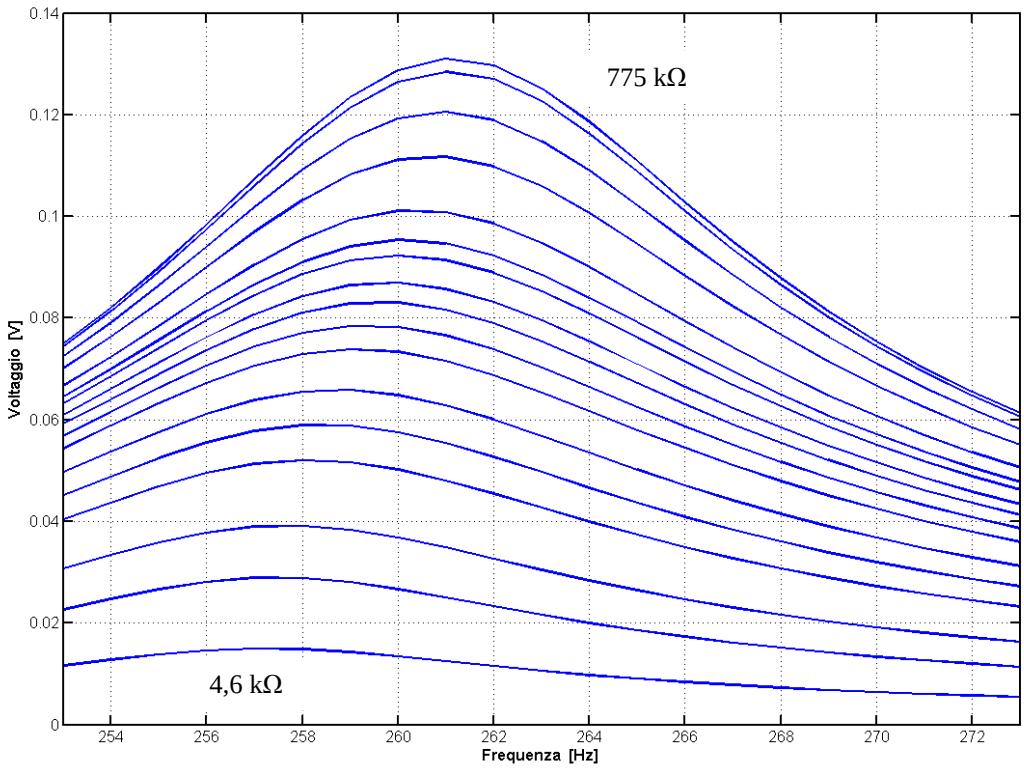

Fig. 5.6 *Andamento delle curve di voltaggio in funzione della frequenza (del secondo modo) per valori di resistenza crescente calcolato al FEM per la trave ad E con χ=0,43 (a=280 mm/s^2)*

Difatti in quel punto una cricca è soggetta al modo di carico 3, chiamato di lacerazione o strappo (nel quale lo sforzo è di taglio nel piano della cricca in direzione ortogonale ad essa). Questo presuppone che in tali punti la trave a geometria ad E dovrà essere rinforzata mediante l'applicazione di materiale plastico supplementare di rinforzo. Oppure il coefficiente d'intaglio in tale punto può venir ridotto dall'aggiunta di un foro passante, tale da aumentarne il raggio di raccordo al vertice (questo comunque indebolisce la struttura e non consente di sfruttarla al massimo). Tuttavia, questi aspetti legati alla verifica strutturale, per il momento non verranno presi in considerazione.
Con l'analisi armonica è possibile calcolare il voltaggio generato dalla trave, anche in questo caso soggetta ad un'eccitazione sinusoidale alla base (a=280 mm/s^2). In figura (Fig. 5.6) si nota l'andamento delle curve di voltaggio u_{max} generato dalla trave ad E al variare della frequenza per ogni valore di resistenza esterna applicata. Tali curve sono ottenute estraendo una parte della curva comprendente i tre modi di (Fig. 5.5) e concentrandosi su quello maggiore, ovvero il secondo a 258 Hz. Si fa riferimento a questo solo modo per la creazione della curva di massima potenza estraibile, ma si ricordi che risulta possibile sfruttare anche il primo modo di vibrazione, con una resa inferiore.
Le curve di voltaggio di riferimento sono la più bassa per una condizione tendente al cortocircuito (R→0) e la più alta per la condizione tendente al circuito aperto (R→∞). La frequenza di risonanza del secondo modo, corrispondente al punto di massimo relativo della curva, cresce al crescere della resistenza applicata.
In seguito, elaborando i dati, risulta possibile determinare i valori della potenza elettrica generata in funzione della resistenza.

5.3 Confronto dei risultati

La (Fig. 5.7) mostra il confronto delle curve della frequenza di risonanza in funzione della resistenza elettrica per tra la trave rettangolare semplice e la trave con geometria ad E, mentre la (Fig. 5.8) mostra il confronto dei valori di potenza.
Dalle curve della frequenza di risonanza si nota che il primo modo della trave a geometria ad E può abbassarsi sino ad un valore di quasi la metà rispetto alla rettangolare. Questo dipende dal valore assunto dal parametro χ. Infatti esaminando le varie curve si ha che se $\chi \rightarrow 1$ le due frequenze fondamentali combaciano. Inoltre si osserva che per valori di $\chi \approx 0{,}5$ la curva della frequenza risente molto meno dell'effetto del carico resistivo a valle. Il fatto che per la trave ad E la frequenza fondamentale sia più bassa può risultare un vantaggio, in quanto generalmente le frequenze delle vibrazioni nell'ambiente sono relativamente basse (0-100 Hz).

Le curve della potenza erogata mostrano invece che solo un determinato intervallo del rapporto di larghezza ($0{,}7 < \chi < 0{,}9$) si generano valori di picco superiori alla trave rettangolare. Questo si spiega col fatto che nel secondo modo proprio di vibrare l'ala laterale si comporta come un corpo rigido per cui non lavora ai fini di deformazione del materiale piezoelettrico. Essa però, oscillando genera un momento flettente applicato all'estremità della trave , che fa aumentare molto il coefficiente di utilizzo del materiale ψ della parte centrale di trave. L'incremento di potenza erogata ottenibile è stimato nell'intorno del 7%.

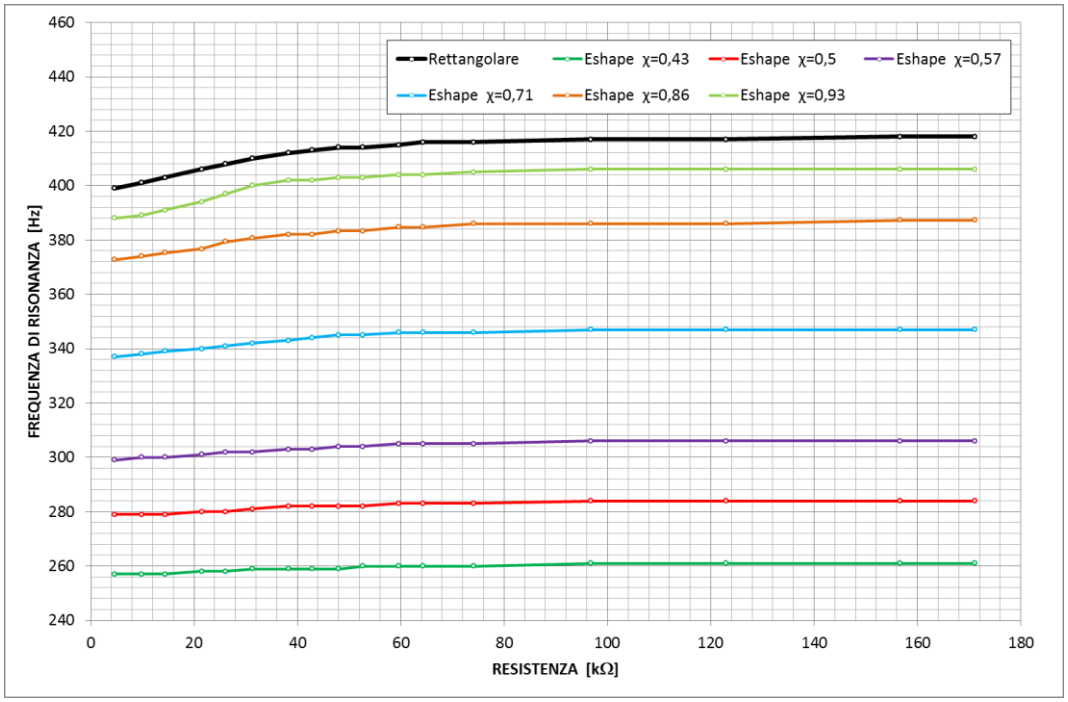

Fig. 5.7 *Confronto tra le curve della frequenza di risonanza delle travi con geometria ad E e la rettangolare al variare della resistenza elettrica applicata*

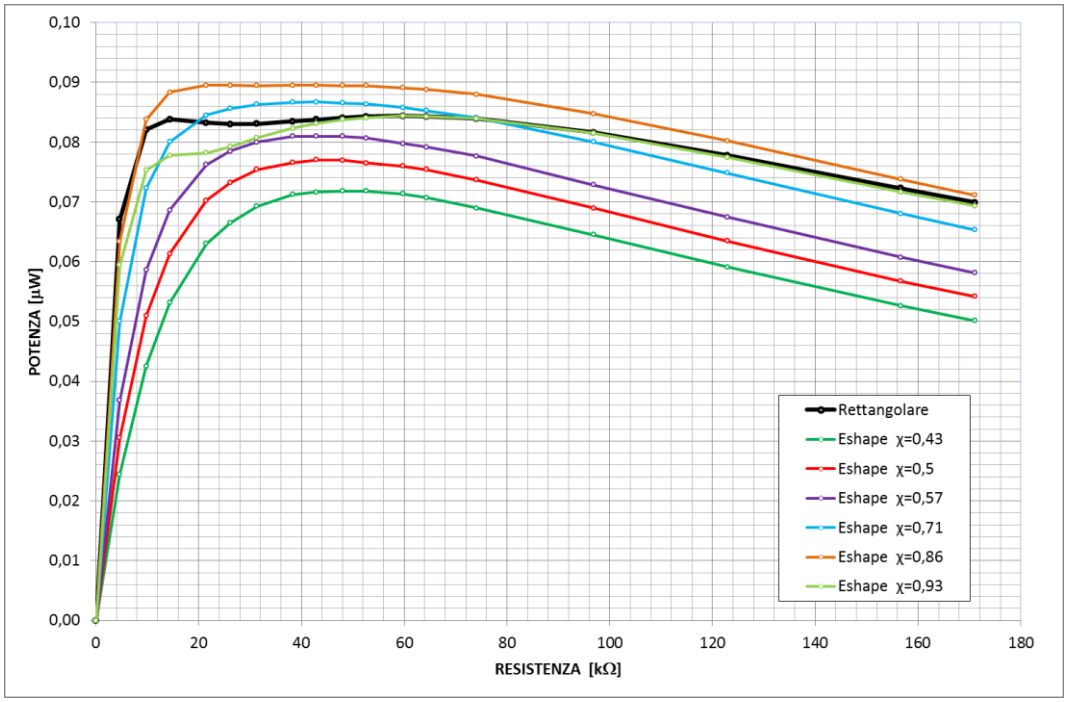

Fig. 5.8 *Confronto tra le curve della potenza delle travi con geometria ad E e la rettangolare al variare della resistenza elettrica applicata*

5.4 Conclusioni

In questo capitolo è stata proposta un'analisi numerica di una variante di trave avente geometria ad E con un modello agli elementi finiti.
Si è riscontrato che esiste una intervallo del rapporto di larghezza ($0,7< \chi <0,9$) in cui si ha un incremento della potenza erogata rispetto alla trave rettangolare fino al 7%. Inoltre si è osservato che per rapporti pari a $\chi=0,5$ la frequenza di risonanza fondamentale si dimezza.
Questa tipologia di trave può quindi essere impiegata con prestazioni superiori nel caso delle applicazioni di alimentazione di dispositivi elettronici in quanto sfrutta un intervallo maggiore di frequenze utili, dati i suoi modi propri molto vicini. Inoltre presenta una frequenza fondamentale molto bassa ed la particolare geometria fa si che il coefficiente di utilizzo del materiale sia più elevato.

Conclusioni

Questa tesi ha affrontato lo studio delle caratteristiche elettromeccaniche di travi piezoelettriche bimorfe per mezzo sia di simulazioni numeriche che prove sperimentali. L'obiettivo è di incrementare le prestazioni elettriche di conversione da vibrazione o da deformata delle travi rispetto alla configurazione rettangolare, agendo sul comportamento meccanico (Capitolo 1). In particolare è stata studiata la possibilità di incrementarne la potenza elettrica generata tramite l'ottimizzazione sia della geometria costruttiva (Capitoli 2 e 3) che della deformata strutturale (Capitolo 4). Inizialmente si sono elaborati dei modelli agli elementi finiti delle travi bimorfe, che successivamente sono stati validati da prove sperimentali. Inoltre è stata simulata numericamente anche una ulteriore variante di trave con geometria ad E (Capitolo 5).

Per quanto riguarda l'ottimizzazione della geometria, sono state proposte delle geometrie non convenzionali, diverse dal classico profilo rettangolare. In particolare, sono state progettate delle geometrie trapezoidali, con riduzione lineare della larghezza, allo scopo di incrementare la deformazione meccanica media nel materiale piezoelettrico. I criteri dei progettazione delle geometrie trapezoidali considerano la stessa frequenza di risonanza della trave rettangolare di riferimento. Inoltre, sono state considerate geometrie a pari ingombro e pari volume. Le simulazioni ad elementi finiti hanno utilizzato un modello elettromeccanico accoppiato per effettuare un'analisi armonica, per la quale si è utilizzato un valore costante di accelerazione alla base per mezzo del "Large Mass Method". Dalle simulazioni si evince che le travi a geometria ottimizzata generano una potenza massima P_{max} di poco superiore alla trave di riferimento rettangolare. Diventa invece evidente l'incremento di potenza specifica volumica P_{Smax} delle travi trapezoidali a pari larghezza massima rispetto alla rettangolare. Si ricorda che il modello agli elementi finiti è stato costruito con uno smorzamento pari a ζ_b =0,02, valore scelto sulla base di indicazioni di letteratura. Per realizzare le prove sperimentali, è stato progettato un sistema di afferraggio delle travi, un sistema di controllo e di misura di tipo semiautomatico con il programma Labview™ ed un dispositivo composto da resistenze con interruttori comandati da relè. Dai dati sperimentali, si osserva che la potenza elettrica generata P_{max} nel caso di travi a geometria ottimizzata risulta maggiore, e nel caso di trapezoidale diretta a pari volume di valore quasi doppio, rispetto alla semplice configurazione rettangolare. Per quanto riguarda la potenza elettrica specifica volumica P_{Smax}, le travi ottimizzate a pari ingombro laterale danno i valori più alti estraibili.

Per quanto riguarda l'ottimizzazione della deformata, la risposta elettromeccanica (tensione, voltaggio di uscita e potenza trasmessa) di una configurazione ottimale (chiamata '*ML*') è stata confrontata con una trave semplicemente caricata all'estremo libero (chiamata '*RC*'). I risultati di un modello monodimensionale analitico mostrano che la configurazione *ML* è caratterizzata da un livello doppio di

deformazione media e voltaggio di uscita rispetto alla configurazione *RC*. È stato successivamente sviluppato un modello tridimensionale agli elementi finiti per ottenere una risposta più accurata del sistema. Il confronto dei risultati analitici e numerici (campo delle tensioni e delle deformazioni, potenza trasmessa) conferma i vantaggi della configurazione *ML*, con un voltaggio d'uscita di circa il 50% maggiore rispetto alla configurazione non ottimizzata *RC*. Infine, sono state eseguite delle prove sperimentali per verificare ulteriormente l'incremento di potenza elettrica data dalla configurazione ottimizzata proposta. I risultati ottenuti hanno dimostrato la possibilità di ottenere una potenza erogata superiore quando si ottimizza la deformata flessionale della trave.

Infine è stata proposta una simulazione numerica con un modello agli elementi finiti di una variante di trave avente geometria ad E. Si è riscontrato che esiste una intervallo del rapporto di larghezza ($0{,}7 < \chi < 0{,}9$) tale per cui si ha un incremento della potenza erogata rispetto alla trave rettangolare fino al 7%. Inoltre si è osservato che per rapporti di taglio pari a $\chi = 0{,}5$ la frequenza di risonanza fondamentale si dimezza.

Questa tesi ha mostrato alcune strategie di ottimizzazione per estrarre una potenza elettrica maggiore rispetto ad una trave rettangolare in configurazione base. Come proseguo dell'attività, si potrebbe studiare un'applicazione di trave bimorfa improntata ad un caso reale, come ad esempio l'alimentazione di un sensore wireless.

Appendice A

Nella figura sottostante sono mostrati i disegni quotati delle cinque travi piezoelettriche costruite dalla Piezo Systems™ ed utilizzate nelle prove sperimentali. Il materiale piezoelettrico è un PSI-5A4E, il sostegno metallico è in acciaio inossidabile e gli elettrodi sono al nickel.

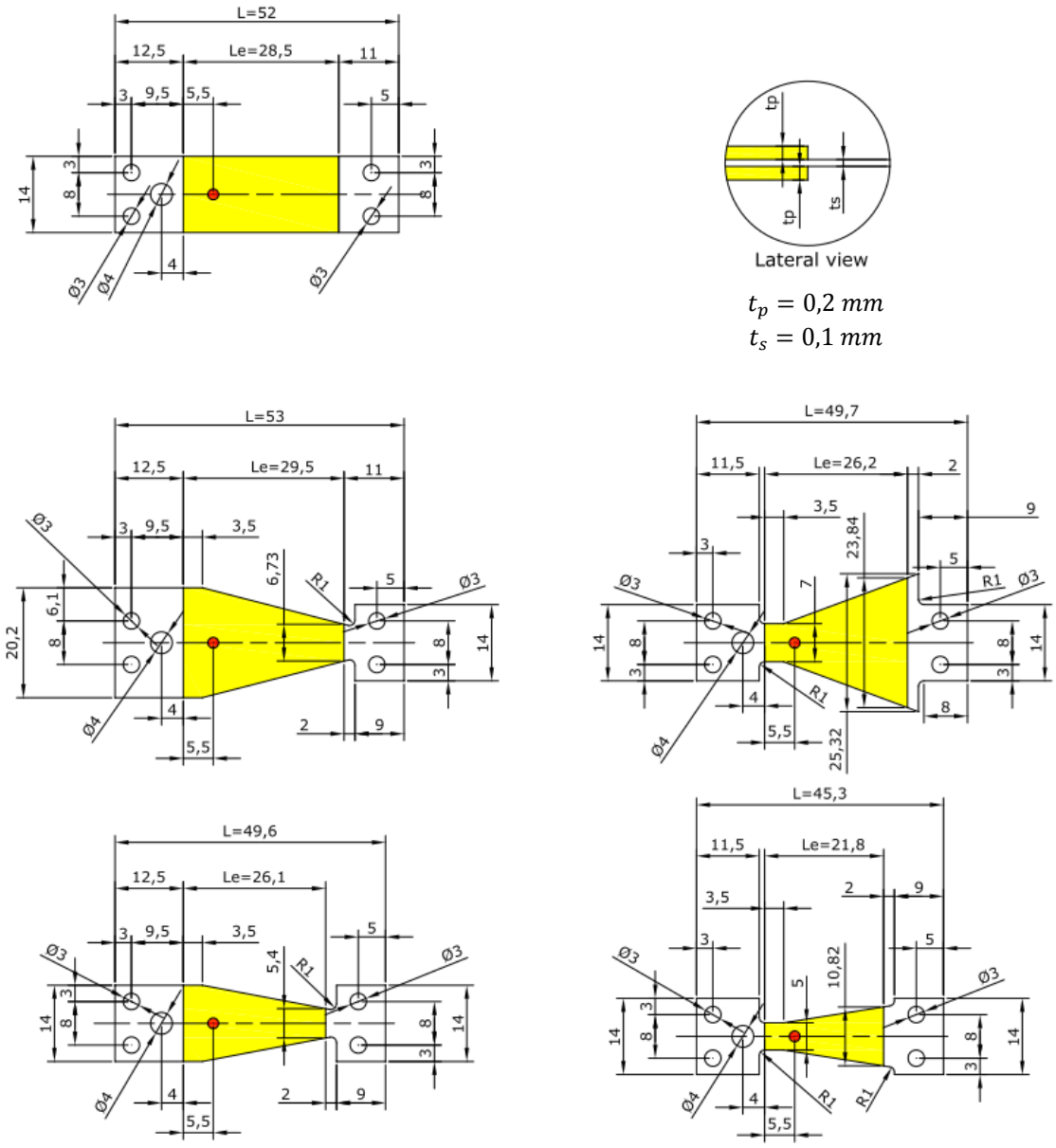

Fig. A.1 *Geometrie delle travi piezoelettriche*

Appendice B

Di seguito sono proposti i disegni costruttivi della massa d'estremità applicata alle travi piezoelettriche e dei due elementi costituenti l'afferraggio.

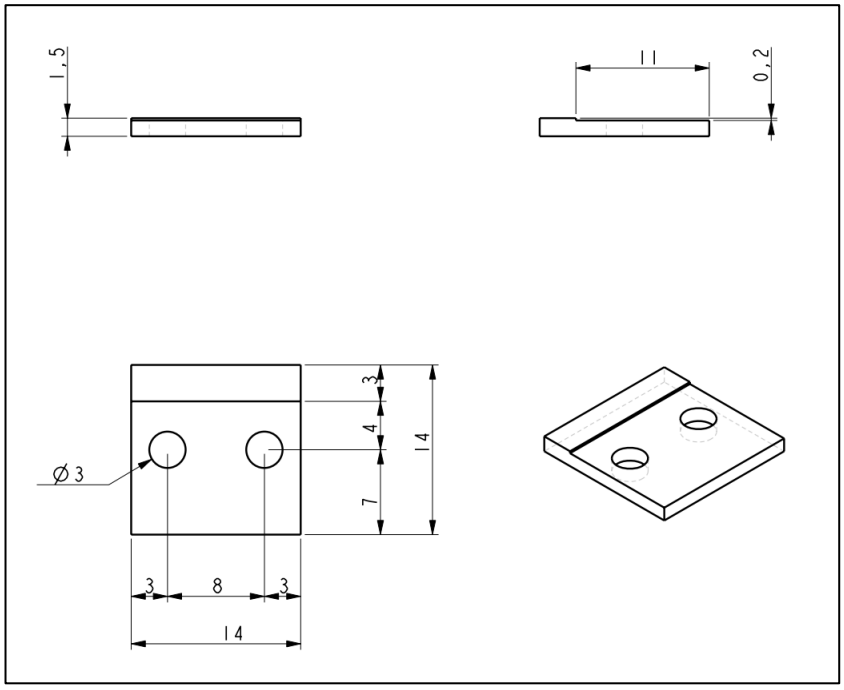

Fig. B.1 *Geometria della massa d'estremità*

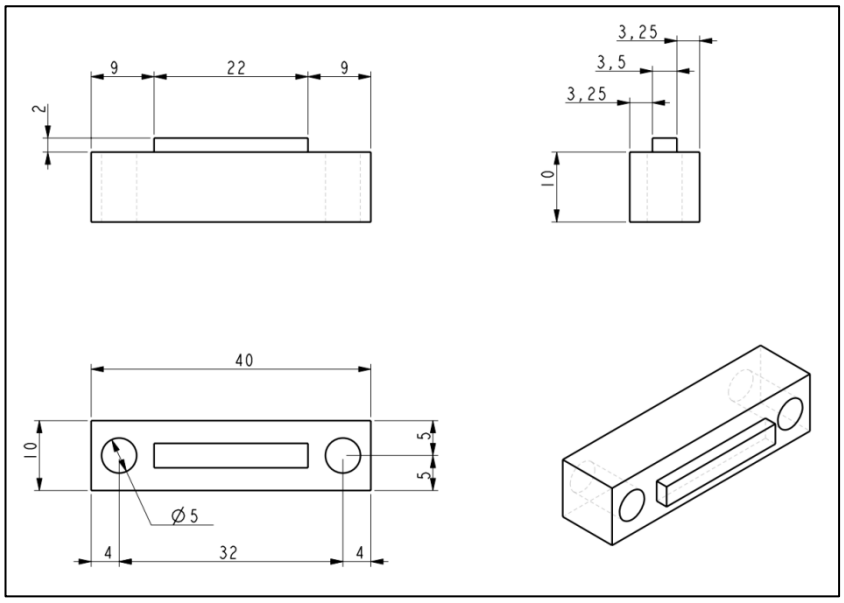

Fig. B.2 *Geometria dell'incastro dell'afferraggio*

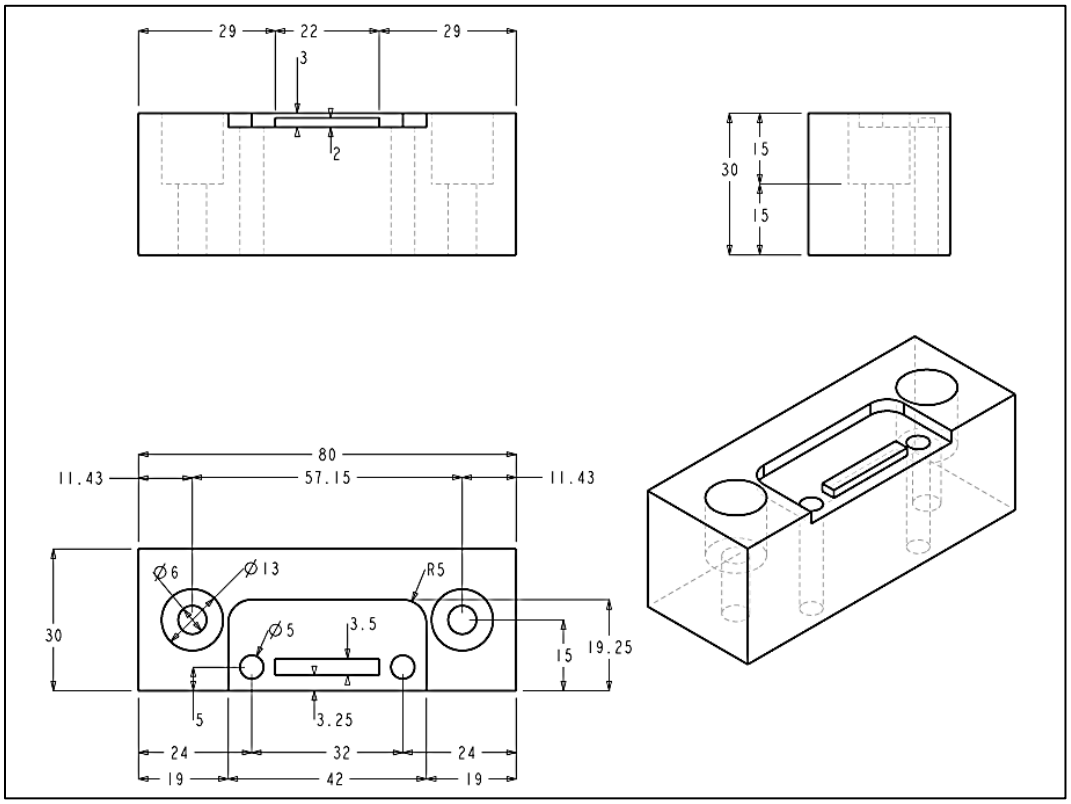

Fig. B.3 *Geometria della base dell'afferraggio*

Il presente afferraggio è realizzato da un blocco pieno di acciaio strutturale S235 che viene lavorato manualmente alla fresa. I fori sono fatti mediante trapano a colonna.

Appendice C

In questa appendice si riportano le caratteristiche del materiale utilizzate nelle simulazioni numeriche. Questi dati sono stati forniti direttamente dalla Piezo Systems™ per il materiale PSI-5A4E, vedi [38].

$$\mathbf{s}^{E} = \begin{pmatrix} 16.4 & -5.74 & -7.22 & 0 & 0 & 0 \\ -5.74 & 16.4 & -7.22 & 0 & 0 & 0 \\ -7.22 & -7.22 & 18.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 47.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 47.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 44.3 \end{pmatrix} 10^{-12} \quad \frac{m^2}{N}$$

Fig. C.1 *Matrice di flessibilità*

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 584 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 584 & 0 & 0 \\ -190 & -190 & 390 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} 10^{-12} \quad \frac{C}{N}$$

Fig. C.2 *Matrice di accoppiamento*

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{T} = \varepsilon_0 \cdot \begin{pmatrix} 1730 & 0 & 0 \\ 0 & 1730 & 0 \\ 0 & 0 & 1700 \end{pmatrix} \quad \frac{C}{V\,m}$$

Fig. C.3 *Matrice delle costanti dielettriche*

dove il valore assunto da ε_0=8,854·10^{-12} F/m rappresenta la permittività del vuoto.
Pe quanto riguarda le proprietà meccaniche dello strato metallico di sostegno, si è assunto materiale omogeneo ed isotropo quale l'acciaio inossidabile.

$$Y = 195\ GPa$$
$$\nu = 0{,}3$$

Fig. C.4 *Proprietà meccaniche del sostegno metallico*

Bibliografia

[1] S. Roundy e et al., «Improving power output for vibration-based energy scavengers,» *Pervasive computing,* vol. 4, n. 1, pp. 28-36, 2005.

[2] G. Despesse, T. Jager e et al., «Design and fabrication of a new system for vibration energy harvesting,» *Proc. Ph.D. Res. Microelectron. Electron.,* vol. 1, pp. 225-228, 2010.

[3] S. R. Anton e H. A. Sodano, «A review of power harvesting using piezoelectric materials (2003-2006),» *Smart Materials and Structures,* vol. 16, pp. R1-R21, 2007.

[4] S. P. Beeby, M. J. Tudor e N. M. White, «Energy harvesting vibration sources for microsystems applications,» *Meas. Sci. Technol.,* vol. 148, n. 2, pp. 68-72, 2011.

[5] W. G. Cady, Piezoelectricity, New York & London: McGraw-Hill, 1946.

[6] B. Jaffe, W. R. Cook Jr. e H. Jaffe, Piezoelectric Ceramics, London and New York: Academic Press, 1971.

[7] Platone, Timeo, Grecia, 360 B.C., p. 80c.

[8] J. G. Schmidt, Curiöse speculationes bey schlaflosen nächten, 1707.

[9] F. U. T. Æpinus, «Mèmoire concernant quelques nouvelles experiences électriques remarquables,» *Histoire de l'Academie Royale deas Sciences et Belles Lettres,* pp. 105-121, 1756.

[10] D. Brewster, «Observations on the pyro-electricity of minerals,» *Edinburgh Journal of Science,* vol. 1, pp. 208-215, 1824.

[11] J. Curie e P. Curie, «Développement, par pression, de l'électricité polaire dans les cristaux hémièdres à faces inclinées,» *Comptes Rendus Hebdomaires des Séances de l'Académie des Sciences,* vol. 91, pp. 294-295, 1880.

[12] J. Curie e P. Curie, «Sur l'électricité polaire dans les cristaux hémièdres à faces inclinées,» *Comptes Rendus Hebdomaires des Séances de l'Académie des Sciences,* vol. 91, pp. 383-387, 1880.

[13] M. Gallina e D. Benasciutti, «Finite element analysis of optimized piezoelectric bimorphs for vibrational "energy harvesting",» in *International CAE Conference 2013,* Pacengo del Garda, Verona, Italy, 2013.

[14] E. Brusa, S. Zelenika, L. Moro e D. Benasciutti, «Analytical characterization and experimental validation of performances of piezoelectric vibration energy scavengers.,» in *Proceedings of SPIE Conference,* Dresden, Germany, 2009.

[15] D. Benasciutti, L. Moro, S. Zelenika e E. Brusa, «Vibration energy scavenging via piezoelectric bimorphs of optimized shapes,» *Microsyst. Technol.,* vol. 16, n.

doi: 10.1007/s00542-009-1000-5, pp. 657-668, 2010.

[16] L. Moro, D. Benasciutti, E. Brusa e S. Zelenika, «Caratterizzazione sperimentale di "energy scavengers" piezoelettrici ottimizzati,» in *Proceedings of XXXVIII AIAS Conference*, Torino, Italy, 2009.

[17] S. Timoshenko, Strength of materials, Part 2, New York: Van Nostrand, 1940.

[18] L. Moro e D. Benasciutti, «Harvested power and sensitivity analysis of vibrating shoe-mounted piezoelectric cantilevers,» *Smart Materials and Structures*, vol. 19, 2010.

[19] «Ansys, Inc.,» [Online]. Available: http://www.ansys.com.

[20] J. Zhao, X. Zheng, L. Zhou e et al., «Investigation of a d15 mode PZT-51 piezoelectric energy harvester with a series connection structure,» *Smart Materials and Structures*, vol. 21, 2012.

[21] M. Zhu, E. Worthington e J. Njuguna, «Coupled piezoelectric-circuit FEA to study influence of a resistive load on power output of piezoelectric energy devices,» *Smart Sensors, Actuators, and MEMS IV*, vol. 7362, 2009.

[22] M. Giovagnoni, Analisi delle vibrazioni nei sistemi meccanici, Padova: Edizioni Libreria Cortina, 2001.

[23] A. Erturk e D. J. Inmann, «An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy harvesting from base excitations,» *Smart Materials and Structures*, vol. 18, n. 2, p. 025009, 2009.

[24] S. Roundy e P. K. Wright, «A piezoelectric vibration based generator for wireless electronics,» *Smart Material Struct.*, vol. 13, pp. 1131-1142, 2004.

[25] N. E. du Toit e B. L. Wardle, «Experimental verification of models for microfabricated piezoelectric vibration energy harvesters,» *AIAA Journal*, vol. 45, n. 5, pp. 1126-1137, 2007.

[26] L. Moro e D. Benasciutti, «On the optimal bending deflection for piezoelectric scavengers,» in *EuroMech Colloquium 530, Structural Control and Energy Harvesting*, Bristol, 2011.

[27] L. Moro, M. Gallina e D. Benasciutti, «Studio della deflessione ottimale in travi piezolettriche a pianta rettangolare,» in *Proceedings of XL AIAS Conference*, Palermo, Italy, 2011.

[28] D. Benasciutti, L. Moro e M. Gallina, «On the optimal bending deflection of piezoelectric scavengers,» *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 24, n. 5, pp. 627-639, 2013.

[29] O. Kopmaz e Ö. Gündoğdu, «Characterization of different beam shapes for piezoelectric energy harvesting,» *International Journal of Mechanical Engineering Education*, vol. 31, pp. 132-142, 2003.

[30] A. Brown, Mechanical springs (Engineering design guides, 42), Oxford University Press, 1981.

[31] C. Maurini, J. Pouget e F. Dell'Isola, «Extension of Eulero-Bernoulli model of piezoelectric laminates to include 3D effects via a mixed approach,» *Computer and Structures*, vol. 84, pp. 1438-1458, 2006.

[32] C. W. Lim, L. H. He e A. K. Soh, «Three-dimensional electromechanical responses of a parallel piezoelectric bimorph,» *International Journal of Solids*

and Structures, vol. 38, pp. 2833-2849, 2001.

[33] L. Mateu e F. Moll, «Optimum piezoelectric bending beam structures for energy harvestiong using shoe inserts,» *Journal of Intelligent Material Systems and Structures,* vol. 16, pp. 835-845, 2005.

[34] M. Okayasu, G. Ozeki e M. Mizuno, «Fatigue failure characteristics of lead zirconate titanate piezoelectrics ceramics,» *Journal of the European Ceramic Society,* vol. 30, pp. 713-725, 2010.

[35] D. Castagnetti, «Fractal-inspired multi-frequency structures for piezoelectric harvesting of ambient kinetic energy,» *J. Mech. design,* vol. 133, n. 11, pp. 111005-1-8, 2011.

[36] H. Wu, L. Tang, Y. Yang e C. K. Soh, «A novel 2-DOF piezoelectric energy harvester,» in *ICAST 22nd Internatinal Conference on Adaptive Structures and Technologies,* Corfu (Greece), 2011.

[37] D. Castagnetti, «Experimental modal analysis of fractal-inspired multy-frequency structures for piezoelectric energy converters,» *Smart Materials and Structures,* vol. 21, pp. 1-9, 2012.

[38] «Piezo Systems, Inc.,» [Online]. Available: http://www.piezo.com.

[39] Teofrasto, Sulle Roccie, 314 B.C., p. 28.

[40] C. Linnæi, Flora Zeylanica, Homiæ: Sumtu & Liveris Laurentii Salvii, 1747, p. Præfatio.

[41] L. Lémery, Histoire de l'Academie Royale des Sciences, Parigi, 1717, p. 7.

[42] Z. K. Kusculuoglu, B. Fallahi e T. J. Royston, «Finite element model of a beam with a piezoceramic patch actuator,» *Journal of Sound Vibration,* vol. 276, pp. 27-44, 2004.

[43] T. L. Jordan e Z. Ounaies, «Piezoelectric Ceramics Characterization,» n. NASA CR-2001-211225, 2001.

[44] J. M. Gaugain, «Mémoire sur l'électricité des tormalines,» *Annales de Chimie et de Physique,* vol. 57, pp. 5-39, 1859.

[45] P. J. Costa Branco e J. A. Dente, «On the electromechanics of a piezoelectric transducer using a bimorph cantilever undergoing asymmetric sensing and actuation,» *Smart Materials and Structures,* vol. 13, pp. 631-642, 2004.

Ringraziamenti

Alla fine di questi tre anni di Dottorato di Ricerca, come percorso da me intrapreso per acquisire gli strumenti necessari ad accrescere ulteriormente la mia conoscenza, esprimo tutta la mia soddisfazione di esserne arrivato a compimento. Nonostante questo cammino mi abbia richiesto molti sacrifici, ci sono alcune persone che mi hanno sostenuto e che voglio ringraziare.

In prima persona al prof. De Bona Francesco che mi ha accettato nel suo gruppo di ricerca e mi ha sempre dato supporto in ogni circostanza ed al mio tutor dott. ing. Benasciutti Denis che nonostante il mio carattere sia stato alle volte per lui non facile da gestire ha avuto una grande pazienza nel continuare fino alla fine nel suo ruolo insegnandomi a come imparare dai miei errori. Al responsabile di laboratorio Castellarin Elvio per essere sempre stato disponibile ad affidarmi la costosa strumentazione utilizzata per gli esperimenti. Ai miei compagni di corso Barattin Daniela, Belfio Sandro, Moro Luciano, Nali Marco e Prosperi Francesca con cui ho condiviso giorno per giorno questo cammino e sono stati sempre con me disponibili.

A mio padre, che nonostante non possa più esprimersi, nel mio cuore so che è felice per questo mio traguardo ed a mia madre che comunque sia fa quello che può per me.

Infine ringrazio di cuore tutte le persone non menzionate, ma non per questo meno importanti, che comunque mi hanno sostenuto e consigliato.

Udine, lì 20/02/2014

Marco Gallina